*

ZFC og eksistensen av urindivider.

Noen konsistensresultater.

*

Morten Rognes

1986

*

*

Del I

Hovedresultater

*

§1

I Rognes [1], "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære." ble det beskrevet et mengdeteoretisk system som er en utvidelse av ZFC med visse aksiomer for urindivider, dvs. entiteter som ikke er mengder. Dette system ble kalt for "ZFC;u(L;e)".

L;e er det første-ordens språket som ved siden av de vanlige setningslogiske og kvantifikasjonsteoretiske konstruksjoner kun inneholder de to ikke-logiske konstruksjonene "x er en mengde", som her forkortes med "M(x)", og "x er et element i mengden y" som vi forkorter med "xêy".

Teorien ZFC;u(L;e) er så den første-ordensteorien i L;e som inneholder de følgende og bare de følgende aksiomer som ikke-logiske aksiomer. Det bør bemerkes at begrepet første-ordens teori og begrepet første-ordens språk ble definert presist i Rognes [1] slik at det er unødvendig å gjenta definisjonene her. Aksiomene er:

M1 $(Ax)(Ay)(x\hat{e}y \rightarrow M(y))$.

M2 $(Ey)(M(y) \& (Ax)(x\hat{e}y \leftrightarrow (\neg M(x))))$

M3 $(Ax)(Ay)((M(x) \& M(y) \& (Ez)(z\hat{e}x) \&(Ez)(z\hat{e}y) \& (Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow z\hat{e}y)) \rightarrow x=y)$

M4 $(Ey)((M(y) \& \neg(Ez)(z\hat{e}y)) \& (Aw)(M(w) \&\neg(Ez)(z\hat{e}w) \rightarrow w=y))$

M5 $(Ay)(M(y) \rightarrow (Ex)(M(x) \& (Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow (z\hat{e}y \& B))))$

M6 $(Ay)(Az)(Ex)(M(x) \&(Aw)(w\hat{e}x \leftrightarrow (w=y \vee w=z)))$

M7 $(Ay)(M(y) \rightarrow (Ex)(M(x) \&(Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow (Ew)(z\hat{e}w \& w\hat{e}y))))$

M8 $(Ay)(M(y) \rightarrow (Ex)(M(x) \& (Az)(z\hat{e}x \leftrightarrow (M(z) \& (Aw)(w\hat{e}z \rightarrow w\hat{e}y)))))$

M9 $(Ex)(M(x) \& (Ay)((M(y) \&\neg(Ex)(x\hat{e}y)) \rightarrow y\hat{e}x) \& (Az)((z\hat{e}x \&M(z)) \rightarrow (Ew)(M(w) \&w\hat{e}x \& (Ar)(r\hat{e}w \leftrightarrow r=z))))$

M10 $((Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) \&B(x,z) \rightarrow y=z) \&M(w)) \rightarrow (Ew')(M(w') \& (Ax)(x\hat{e}w' \leftrightarrow (Ey)(y\hat{e}w \& B(x,y))))$

M11 $(M(x) \& (Ew)(w\hat{e}x)) \rightarrow(Ey)(y\hat{e}x \& \neg(Ez)(z\hat{e}y \& z\hat{e}x))$

M12 $[M(x) \& (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow (M(y) \& (Ez)(z\hat{e}y))) \& (Az)(Ay)(y,z\hat{e}x \& y\neq z \rightarrow \neg(Ew)(w\hat{e}y \&w\hat{e}z))] \rightarrow (Ez)(M(z) \& (Ay)(y\hat{e}x \rightarrow (Er)(r\hat{e}y \&r\hat{e}z) \&(At)((t\hat{e}y \&t\hat{e}z) \rightarrow t=r))))$

Dette avslutter listen over aksiomer i teorien ZFC;u(L;e). Aksiomene M1 – M12 kalles henholdsvis for mengdeaksiomet, urmengdeaksiomet, ekstensjonalitets-aksiomet, nullmengdeaksiomet, delmengdeaksiomet,parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, replacementaksiomet, fundierungsaksiomet og utvalgsaksiomet. I forbindelse med M5 bemerkes det at det må kreves at variabeltegnene x og y ikke forekommer fri i B. Når det gjelder M10 kreves det at variablene w og w' ikke forekommer fri i B(x,y).

Man ser fra listen ovenfor at aksiomene er en modifisering av de vanlige aksiomene i Zermelo-Fraenkels mengdelære bortsett fra at det er lagt til to aksiomer, nemlig M1 og M2. M1 uttrykker at dersom noe er et element i noe annet så er dette siste alltid en mengde. M2 uttrykker at det finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de elementer som er ikke-mengder.

Systemet ZFC;u(L;e) ble nøyere kommentert i Rognes [1] og leseren henvises derfor til dette arbeidet. Det nevnes også at alle de vanlige mengdeteoretiske begrepene kan innføres som i Rognes [1] og at de velkjente satser i Zermelo-Fraenkel mengdelære også kan utledes i denne versjonen av systemet. En forholdsvis detaljert redegjørelse for dette foreligger i det nevnte skrift som vi i det følgende forutsetter at leseren har satt seg fullstendig inn i og dessuten har for hånden. De begrepsdannelsene om trengs her vil uten videre bli hentet fra dette arbeidet og benyttet uten særskilte kommentarer.

La oss også bemerke at den naturlige modellen for systemet ZFC;u(L;e) er det vanlige kumulative hierarki over enhver (eventuelt tom) mengde med urindivider, dvs. ikke-mengder. Dette hierarki kan defineres slik:

(i) $V;u(0) = Mg(x: \neg M(x))$
(ii) $V;u(a+1) = V;u(a) \cup Pt(V;u(a))$
(iii) $V;u(b) = \bigcup_{a<b}(V;u(a))$ om b er et limes-ordinaltall.

Man starter altså med mengden av urindivider som utgjør nivå 0. Elementene på nivå 1 er så alle elementene på nivå 0 pluss alle mengder av elementer som hører med på nivå 0. Elementene på nivå a+1 utgjøres av alle elementene på det umiddelbart foregående nivå samt alle delmengder av dette nivå. Er b et limes-ordinaltall er elementene på nivå b nøyaktig de som som inngår i unionen av alle tidligere nivåer. Umiddelbart fortoner hierarkiet $<V;u(a)>/a \hat{e} On/$ seg som en forholdsvis velavgrenset og svært naturlig begrepsdannelse.

§2

Formålet med dette arbeidet er å undersøke forholdet mellom det system som nettopp ble beskrevet og det som kan kalles det vanlige Zermelo-Fraenkel system med utvalgsaksiom. Dette betegnes med "ZFC". ZFC er et av de mer kjente mengdeteoretiske systemer. Det synes å være blandt dem som har vært mest studert og gjennomanalysert. Det er velkjent hvordan man i dette system unngår de vanlige paradokser som Russels paradoks, Cantors paradoks og det såkalte Burali-Forti´s paradoks. Inntil nå har man heller ikke oppdaget noen motsigelser i dette system og det virker som om svært få egentlig forventer at noen motsigelser skal kunne utledes i det.

Vårt hovedanliggende i forbindelse med systemet ZFC;u(L;e) kan oppsummeres i følgende punkter:

(i) Vi ønsker å vise at systemet ZFC;u(L;e) er konsistent relativt til ZFC (og derfor til ZF i lys av Gødels resultater).

(ii) Det eneste aksiomet i ZFC;u(L;e) som sier noe om mengden av urindivider er M2 som uttrykker at det finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de entiteter som er ikke-mengder. Vi ønsker å studere mer detaljert hvilke aksiomer om urindivider som kan legges til systemet ZFC;u(L;e) og hvordan forholdet mellom disse aksiomene er.

(iii) Gitt de nye setningene om urindivider som vil bli betraktet – og som forøvrig vil bli angitt i den neste paragrafen – ønsker vi å vise at systemet ZFC;u(L;e) utvidet med disse enkeltvis eller i visse grupper er konsistent relativt til den vanlige versjonen av ZFC utvidet med et aksiom som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall. I denne forbindelse er det vår hensikt å studere en gruppe av intepretasjoner (eller modeller) som også har en viss interesse i seg selv.

§3.1

Før vi går videre er det nødvendig å innføre noen tekninske begrepsdannelser som er av stor betydning i den videre fremstilling. La L;1 og L;2 være to første-ordens språk i den betydning som er angitt i Rognes [1]. Er f da en rekursiv funksjon som avbilder Fm(L;1) (klassen av formler i L;1) inn i mengden Fm(L;2) kalles f for en intepretasjon av L;1 inn i L;2. Er T;1 og T;2 henholdsvis en første-ordens teori i L;1 og L;2 og f en intepretasjon av L;1 inn i L;2, kalles f en intepretasjon av T;1 inn i T;2 om man har at f‘‘ Th(T;1) Inkl Th(T;2), mao. hvis og bare hvis man har at f avbilder alle teoremene i T;1 (Th(T;1)) inn i klassen av teoremer i T;2 (Th(T;2)).

§3.2

I dette arbeidet betegner L det første-ordens språket man får når man i L;e sløyfer identitet som primitivt predikat og dessuten sløyfer mengdepredikatet "x er en mengde". Det siste predikatet forkortes med "M(x)". De primitive logiske konstruksjonene i L er derfor all- og eksistenskvantoren samt de vanlige setningslogiske konnektivene. Det eneste ikke-logiske predikatet i L er medlemskapspredikatet "xêy" som leses "x er et element i mengden y". Systemet ZFC er da den første-ordens teorien i L som inneholder de vanlige logiske aksiomene for kvantorene og de setningslogiske konstruksjonene og som dessuten inneholder de vanlige formuleringer i L av ekstensjonalitetsaksiomet, nullmengdeaksiomet, utsondringsaksiomet, parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, uendelighetsaksiomet, replacementaksiomet, fundierungsaksiomet og utvalgsaksiomet som ikke-logiske aksiomer. Identitet innføres som definert begrep på vanlig måte.

Det bemerkes at vi i dette arbeidet vil holde oss konsekvent til den formuleringen av systemet ZFC som er gitt i Takeuti [1]. Dessuten vil den notasjon og terminologi som er innført i denne boken bli adoptert nærmest fullstendig. Fortrolighet med Takeuti [1] er derfor en fordel, men fremstillingen skulle også være forståelig selvom man benytter en annen lærebok i mengdelære som dekker det samme stoffet. Mengdeteoretiske begrepsdannelser som er allment kjent vil bli benyttet uten at de innføres eksplisitt.

§4 Setninger om urindivider.

La oss for ordens skyld nevne at uttrykket "urindivid" brukes synonymt med uttrykket "ikke-mengde". Klassen av urindivider betegnes med "Ur" og defineres formelt slik: Ur = Mg(x: ¬M(x)).

Fra aksiomlisten M1 – M12 ser man at det eneste aksiom som sier noe om urindivider er M2 som uttrykker den påstand at Ur er en mengde. Dette aksiom sier imidlertid intet om hvorvidt mengden Ur er tom eller ikke. Det første tilleggsaksiomet som betraktes er derfor:

| Ur1 (Ex)(¬M(x)) |

Dette uttrykker ganske enkelt at det finnes minst et urindivid.

Spørsmålet oppstår nå om hvor mange urindivider det er rimelig å anta at eksisterer. For hvert naturlig tall n vil vi betrakte et aksiom som sier at det finnes i det minste n distinkte urindivider. Dette aksiomet kan formuleres slik:

Ur2(n) (Ex;1)...(Ex;n)(Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r) & Konj/j,1,n/(¬M(x;j)))

Merk i denne forbindelse at uttrykket "Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r)" betegner konjunksjonen av alle setningene av typen "x;j≠x;r" der j≠r og hvor 1≤j,r≤n. Uttrykket "Konj/j,1,n/(¬M(x;j))" betegner konjunksjonen av alle formlene "¬M(x;j)" ettersom j gjennomløper tallrekken fra og med 1 til og med n.

Betrakter man sekvensen <Ur2(n)>/nêN/ ser man at denne inneholder uendelig mange aksiomer. Alle disse aksiomene er innbyrdes logisk forenelige. Det er åpenbart at Ur2(n+1) impliserer Ur2(n) og at Ur2(m) impliserer Ur2(n) om m≥n≥1. Naturligvis impliserer også Ur2(n) det første aksiomet, Ur1, for alle n≥1.

Vi ønsker også å betrakte, for hvert naturlig tall n≥1, et aksiom som uttrykker at det finnes nøyaktig n urindivider. Dette kan formuleres slik:

Ur3(n) (Ex,1)...(Ex;n)(Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r) &
Konj/j,1,n/(¬M(x;j)) &(Ax)((¬M(x)) –> Disj/i,1,n/(x=x;j)))

Her er naturligvis de diverse ledd i sekvensen <Ur3(n)>/nêN/ innbyrdes logisk uforenelige. Det er imidlertid klart at Ur3(n) impliserer Ur3(m) og Ur1 om n≥m≥1. Det skulle også være klart at Ur3(n) impliserer negasjonen av Ur2(m) om m>n.

Det virker eiendommelig å hevde at det bare finnes et endelig antall av urindivider. Mao. fortoner de diverse Ur3(n) seg som temmelig bizarre påstander. Imidlertid er det ikke sannhetsverdien til disse formlene som angår oss her. Grunnen til at disse aksiomene nevnes er selvfølgelig bare den at vi er interessert i konsistensspørsmålet for systemene i sekvensen ZFC;u(L;e)+Ur3(n).

De følgende to aksiomer, Ur4 og Ur5, sier henholdsvis at mengden av urindivider er likemektig med N og at mengden av urindivider er likemektig med en mengde som inneholder N. Vi gjør oppmerksom på at N er den minste mengden som inneholder ø og som inneholder {x} om den inneholder x. Med andre ord er N mengden av Zermelos naturlige tall.

Ur4 (Ex)(Ey)(Ez)(M(x) & M(y) & M(z) & x: y–(1-1,på)–> z & y=Ur & z=N)

Det andre aksiomet kan formuleres slik:

Ur5 (Ex)(Ey)(Ez)(M(x) & M(y) & M(z) & x: y–(1-1,på)–> z &
y=Ur & N inkl z)

Disse aksiomene kunne også ha blitt formulert på en mer kompakt måte ved henholdsvis Cd(Ur) = Cd(N) og Cd(Ur)≥Cd(N). Men av rent tekniske grunner foretrekker vi de to formuleringene som er nevnt ovenfor. Det bemerkes at Ur4 impliserer Ur5, videre at Ur4 selvfølgelig impliserer Ur2(n) for alle n≥1. Ur4 impliserer også Ur1. Ur4 er uforenelig med de diverse aksiomene Ur3(n) der n≥1.

Av aksiomene ovenfor er det bare Ur1, Ur2(n) og Ur5 som kan virke rimelige intuitivt sett. De resterende av de betraktede aksiomer virker mindre rimelige fordi det er naturlig å anta at dersom det eksisterer urindivider bør det finnes mengder av slike som har et meget stort kardinaltall.

I teorien ZFC;u(L;e) kan man vise at Ur er en mengde, dvs. at det finnes noe x der x=Ur & M(x). Man kan også vise at denne mengden kan velordnes, noe som i sin tur

innebærer at mengden har et fiksert kardinaltall. Det følgende er altså et teorem i teorien ZFC;u(L;e): (Ex)(M(x) & Cd(x) = Cd(Ur)). Imidlertid kan man spørre om det er rimelig å anta at urindividene utgjør en slik fiksert totalitet. Man kunne med andre ord betrakte den mulighet at urindividene utgjør en *klasse* på samme måte som On, klassen av ordinaltall. I så tilfelle må man sløyfe M2 som nettopp postulerer at Ur er en mengde. Det vil i så fall være et åpent spørsmål hva man skal erstatte M2 med. Det følgende aksiom synes å være interessant og vil bli tatt i betraktning her:

Ur6 $(Ax)(M(x) \rightarrow (Ey)(M(y) \& y \approx x \& (Az)(z \hat{e} y \rightarrow \neg M(z))))$

Det denne formelen uttrykker er at det til enhver mengde alltid finnes en likemektig mengde som bare inneholder urindivider.

Systemet man får når man fjerner M2 fra ZFC;u(L;e) kalles her for ZFC;u–(L;e). Det systemet man får når man så til ZFC;u–(L;e) legger til Ur6 som et nytt ikke-logisk aksiom kalles for ZFC;u+(L;e). Man legger merke til at man i ZFC;u+(L;e) kan utlede $\neg(Ey)(M(y) \& y=Ur)$. Det følger fra dette at systemet ZFC;u+(L;e) er inkonsistent med ZFC;u(L;e). Man kan også utlede negasjonene av de to aksiomene Ur4 og Ur5 i ZFC;u+(L;e) siden begge disse aksiomene impliserer at $(Ey)(M(y) \& y=Ur)$. Derimot ser man lett at aksiomene Ur1 og Ur2(n) ($n \geq 1$) kan utledes fra Ur6 sammen med de andre prinsippene som inngår i ZFC;u–(L;e).

Dette avslutter dermed den listen over formler som vi ønsket å betrakte i forbindelse med teorien ZFC;u(L;e).

§5

De resultatene som det vil bli gitt bevis for her kan nå oppsummeres i de teoremene som vil bli formulert i de følgende paragrafer. Først bemerkes det at "ZFC" betegner Zermelo-Fraenkel systemet for mengdelære utvidet med utvalgsaksiomet. Uttrykket "x er et utilgjengelig kardinaltall" forkortes med "Inacc(x)" og defineres som i Takeuti [1], side 86, Definisjon 10.66. Formelen "(Ex)(Inacc(x))" forkorter derfor en formel i L. Denne formelen betegner vi med I. ZFC+I betegner da systemet ZFC utvidet med I som nytt ikke-logisk aksiom. Det bemerkes også at bokstaven "æ" i det følgende brukes til å betegne det minste utilgjengelige kardinaltall. Er S en setning i L;e betegner ZFC;u(L;e)+S systemet ZFC;u(L;e) utvidet med S som nytt ikke-logisk aksiom.

Vi vil etterhvert gi bevis for de følgende teoremer:

Teorem I (a) ZFC;u(L;e) er konsistent om ZFC er konsistent.
(b) ZFC;u–(L;e) er konsistent om ZFC er konsistent.

Dette er det første hovedreultatet. Det andre hovedresultatet i dette arbeidet er denne satsen:

Teorem II Alle de følgende systemer er konsistente relativt til ZFC+I:
(1) Systemet ZFC;u(L;e) + Ur1
(2) Alle systemene i sekvensen <ZFC;u(L;e)+Ur2(n)>/n≥1/.
(3) ZFC;u(L;e) utvidet med konjunksjonen av alle aksiomene Ur2(n) for hvert naturlig tall n der n≥1.
(4) Alle systemene i sekvensen <ZFC;u(L;e)+Ur3(n)>/n≥1/.
(5) ZFC;u(L;e) + Ur4

(6) ZFC;u(L;e) + Ur5
(7) ZFC;u–(L;e) + Ur6

Når det blir gitt bevis for Teorem II vil dette skje på en slik måte at man, gitt et bevis for en formel av typen P&¬P i et av systemene nevnt under (1) – (7), viser hvordan dette bevis mekanisk kan omformes til et bevis for en formel av typen Q&¬Q i ZFC+I. En lignende bemerkning kan gjøres i forbindelse med Teorem I.

Noen bemerkninger helt tilslutt: Formodentlig kan ZFC intepreteres inn i ZFC;u(L;e). I lys av Teorem I er da ZFC;u(L;e) like uttrykkssterk og ekvikonsi-stent med ZFC. Det virker også rimelig å tro at ZFC kan intepreteres inn i ZFC;u–(L;e) + Ur6 samt de andre systemene som ble nevnt i Teorem II. Derimot har vi ennå ikke avgjort om disse systemene kan intepreteres inn i ZFC. På det nuværende tidspunkt har vi bare lykkes i å intepretere dem inn i ZFC + I.

§6 Bevis for Teorem I

Vi betrakter en avbildning ß;0 av Fm(L;e) –> Fm(L) som er definert induktivt på den følgende måte:

(i) ß;0((Ex)P) = (Ex)(ß;0(P))
(ii) ß;0((Ax)P) = (Ax)(ß;0(P))
(iii) ß;0(P&Q) = ß;0(P) & ß;0(Q)
(iv) ß;0(PvQ) = ß;0(P) v ß;0(Q)
(v) ß;0(P–>Q) = ß;0(P) –> ß;0(Q)
(vi) ß;0(P<–>Q) = ß;0(P) <–> ß;0(Q)
(vii) ß;0(¬P) = ¬ß;0(P)
(viii) ß;0(x=y) = (x=y)
(ix) ß;0(xêy) = (xêy)
(x) ß;0(M(x)) = (x=x)

Gitt en formel P i L;e er det klart at man rent mekanisk kan konstruere ß;0(P) ved å benytte reglene (i) – (x).

(a) Det er svært lett å vise at denne funksjonen ß;0 avbilder de logiske aksiomene i L;e på teoremer i ZFC. Det er såpass enkelt å vise dette at oppgaven overlates til leseren.

(b) Det er videre lett å vise at dersom ß;0(P) og ß;0(P–>Q) er teoremer i ZFC så er ß;0(Q) det også. Dessuten ser man umiddelbart at om ß;0(P) er et teorem i ZFC så er ß;0((Ax)P) det også.

(c) For å vise at ß;0 overfører alle teoremene i ZFC;u(L;e) til teoremer i ZFC er det derfor tilstrekkelig å vise at ß;0(P) er et teorem i ZFC om P er et av aksiomene M1 – M12. At dette er tilfelle kan leseren selv kontrollere. M1 overføres til en logisk sannhet. M2 overføres til nullmengde-aksiomet i ZFC. M3 – M12 overføres til de tilsvarende vanlige ZFC-aksiomene.

Fra punkt (a) – (c) følger det ved induksjon på mengden av teoremer i ZFC;u(L;e) at ß;0 avbilder denne mengden inn i mengden av teoremer i ZFC. Anta nå at det fantes en formel P i L;e slik at P&¬P var et teorem i ZFC;u(L;e). Da måtte man ha at ß;0(P&¬P) = ß;0(P)&ß;0(¬P) = ß;0(P)&¬ß;0(P) var et teorem i ZFC. Det følger i så fall at ZFC ville være inkonsistent om ZFC;u(L;e) var det. Denne meget enkle intepretasjonen ß;0 av L;e inn i L kan altså brukes til å vise riktigheten av Teorem I.

Noen bemerkninger: Man ser at ß;0(Ur1) = (Ex)(x≠x) og derfor at

ß;0(¬Ur1)= ¬(Ex)(x≠x)

er et teorem i ZFC. Fra dette følger det at ZFC;u(L;e) utvidet med ¬Ur1 er konsistent relativt til ZFC. Siden alle aksiomene Ur2(n), Ur3(n), Ur4, Ur5 og Ur6 impliserer Ur1(n tenkes fiksert og ≥1) følger det at ZFC;u(L;e) utvidet med negasjonen av hvert av disse aksiomene er konsistent om ZFC;u(L;e) utvidet med ¬Ur1 er det. Sammen med Teorem 2 impliserer dette at disse aksiomene er *uavhengige* av ZFC;u(L;e) forutsatt at ZFC+I er konsistent. Det som her er nevnt kan oppfattes som et korollar til våre to hovedteoremer og fortjener derfor en viss oppmerksomhet.

§7 En familie av intepretasjoner av L;e inn i L

I det følgende arbeider vi innenfor systemet ZFC+I slik det er beskrevet i Takeuti [1]. Det minnes om at æ er det minste utilgjengelige kardinaltall.

En sekvens <Q(d,a)>/aêon/ der d≤æ defineres ved transfinit induksjon på den følgende måte:

(7.1) (i) Q(d,0) = Mg(<x,æ>: xêd)
(ii) Q(d,a+1) = Q(d,a) U Pt(Q(d,a)) (aêOn)
(iii) Q(d,b) = UN/a<b/(Q(d,a)) om bêK;II

Anta nå at t er en eller annen lukket term i L som betegner et eller annet ordinaltall ≤æ. Vi definerer da en intepretasjon av L;e inn i L assosiert med termen t, ∂;t ved induksjon på lengden av formler på den følgende måte:

(7.2) (i) ∂;t((Ax)P) = (Ax)(xêQ(t,æ) –> ∂;t(P))
(ii) ∂;t((Ex)P) = (Ex)(xêQ(t,æ) & ∂;t(P))
(iii) ∂;t(¬P) = (¬∂;t(P))
(iv) ∂;t(P&Q) = (∂;t(P) & ∂;t(Q))
(v) ∂;t(PvQ) = (∂;t(P) v ∂;t(Q))
(vi) ∂;t(P–>Q) = (∂;t(P) –> ∂;t(Q))
(vii) ∂;t(P<–>Q) = (∂;t(P) <–> ∂;t(Q))
(viii) ∂;t(x=y) = (x,yêQ(t,æ) & x=y)
(ix) ∂;t(M(x)) = xê(Q(t,æ) - Q(t,0))
(x) ∂;t(xêy) = (xêy & xêQ(t,æ) & yê(Q(t,æ) – Q(t,0)))

Dette avslutter definisjonen av ∂;t. Vi definerer også entitetene ∂, K, Q, K+ og Q+ ved:

(7.3) (i) ∂= ∂;w
(ii) K= Q(w,æ)
(iii) Q = Q(w,0)
(iv) K+ = UN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a)))
(v) Q+ = UN/d<æ/(Q(d,0))

Vi definerer dernest en spesiell intepretasjon av L;e inn i L, ∂;æ ved:

(7.4) (i) ∂;æ((Ax)P) = (Ax)(xêK+ –> ∂;æ(P))
(ii) ∂;æ((Ex)P) = (Ex)(xêK+ & ∂;æ(P))
(iii) ∂;æ(¬P) = ¬∂;æ(P)
(iv) ∂;æ(P&Q) = ∂;æ(P) & ∂;æ(Q)
(v) ∂;æ(PvQ) = ∂;æ(P) v ∂;æ(Q)
(vi) ∂;æ(P–>Q) = ∂;æ(P) –> ∂;æ(Q)
(vii) ∂;æ(P<–>Q) = ∂;æ(P) <–> ∂;æ(Q)
(viii) ∂;æ(x=y) = (x,yêK+ & x=y)
(ix) ∂;æ(M(x)) = xê(K+ – Q+)
(x) ∂;æ(xêy) = (xêy & xêK+ & yê(K+ – Q+))

Som man ser er ∂;æ induktivt definert på lengden av formler i L;e.

Noen bemerkninger er på sin plass i forbindelse med begrepsdannelsene som er innført ved definisjonene (7.1) – (7.4):

(a) Som man ser fra definisjonen (7.1) er <Q(d,a)>/aêOn/, når d<æ, en sekvens av stadig voksende mengder der hvert ledd i sekvensen er inkludert i hvert etterfølgende ledd og der hvert ledd inkluderer alle de foregående. Man starter med en grunnmengde av entiteter, nemlig de diverse <x,æ> der x<d. Dette utgjør nivå 0. Er så a et ordinaltall er nivået a+1 foreningsmengden av nivå a, dvs. Q(d,a) og mengden av alle delmengder av nivå a, ie. Pt(Q(d,a)). Er a et limes-ordinaltall er nivået a unionen av alle tidligere nivåer. Vi kaller sekvensen <Q(d,a)>/aêOn/ for det kumulative hierarki over Q(d,0). Setter man d=ø ser man at Q(d,0) = ø. Man har da at <Q(d,a)>/aêOn/ er det vanlige kumulative hierarkiet av *rene* mengder. Man kan vise at <R(a)>/aêOn/ der R(a) r definert som i Takeuti [1], side 66, Definisjon 9.9 er identisk med <Q(ø,a)>/aêOn/.

På figuren på den neste siden har vi forsøkt å anskueliggjøre de diverse hierarkiene <Q(d,a)>/aêOn/ ettersom d gjennomløper æ på en uformell måte. Det nederste skraverte feltet representerer mengden av alle <x,æ> der xêæ. Punktene innenfor dette feltet som er merket u;0, u;1, u;2, u;3, ..., u;w, u;(w+1),... representerer urindivider og vi tenker oss at u;j=<j,æ> om jêæ. Den delen av det skraverte feltet som er innrammet med en litt tykkere strek representerer Q(w,0), dvs. 0-nivået i det kumulative hierarkiet <Q(w,a>/aêOn/. Den delen av figuren som er avgrenset av de vertikale linjene L;7 og L;o og nedentil er avgrenset av det horisontale linjestykket P8-P1 representerer da alle mengdene og elementene i hierarkiet <Q(w,a)>/aêOn/. De litt tykkere horisontale linjene som er plassert oppover på figuren og som er parallelle med med P8-P1 og som dessuten er merket med Q(w,0), Q(w,1), Q(w,2),..., Q(w,w), Q(w,w+1),Q(w,w+2),.... represen-terer da de diverse nivåene i hierarkiet.

Tilsvarende representerer da alle punktene innenfor den delen av figuren som er avgrenset av de skrå vertikale linjene L;8 og L;0 og nedentil av linje-stykket P9-P1 hierarkiet med grunnmengde Q(w+1,0), dvs. <Q(w+1,a)>/aêOn/.
Figuren antyder det faktum at Q(w,a) Inkl Q(w+1,a) for alle aêOn.

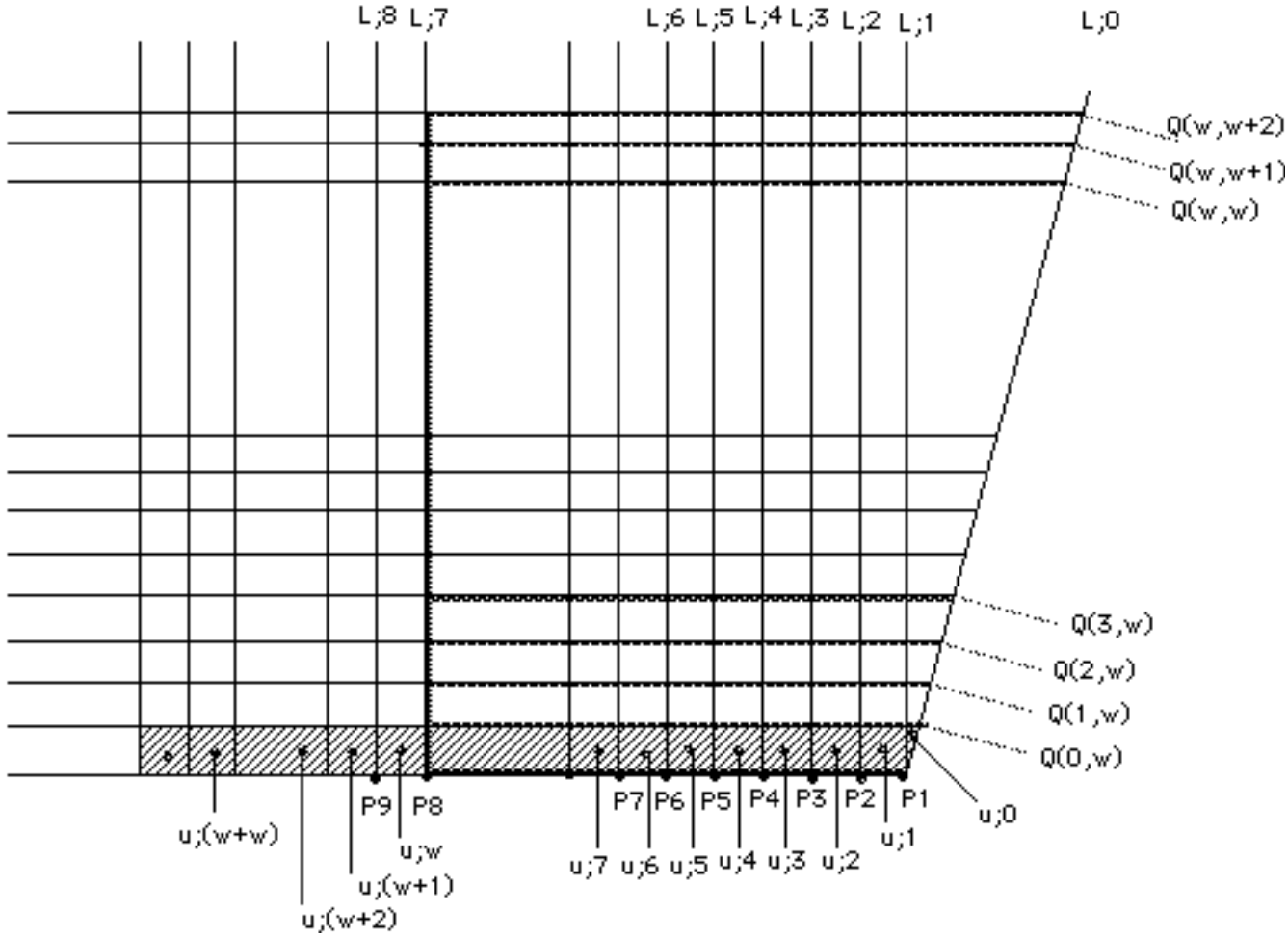
Tilslutt nevner vi at den delen av figuren som er avgrenset av de vertikale linjene L;4 og L;0 og nedentil av linjestykket P4-P1 representerer hierarkiet <Q(4,a)>/aêOn/. Man har selvfølgelig i lys av definisjonen (7.1) at:

Q(4,0) = {<0,æ>, <1,æ>,<2,æ>, <3,æ>}

(b) Definisjonen av ∂;t er strengt tatt litt uformell. Merk at definisjonen bare gir mening om man setter inn en veldefinert lukket term i L for t. Definisjonen bør oppfattes som et skjema for konstruksjon av intepretasjoner. Under ingen omstendigheter bør "t" oppfattes som et variabeltegn i definisjonen (7.2). Vi vil hovedsakelig betrakte intepretasjonene i rekken ∂;0,

∂;1, ∂;2, ∂;3, ..., ∂;w der 0, 1, 2, 3, ... ,w, ... er ordinaltallene i von Neumanns versjon av ordinaltallsrekken.

FIGUR 1



Da har man eksempelvis at 2={0,1}, 3={0,1,2} osv. Dette innebærer at et ordinaltall alltid oppfattes som identisk med mengden av sine forgjengere, med unntak av 0 som ikke har noen forgjenger.

I forbindelse med intepretasjonen ∂;t er det meningen at Q(t,æ)–Q(t,0) intuitivt skal representere universet av mengder. Q(t,0) representerer universet av urindivider i hierarkiet. Q(t,æ) representerer da det totale univers som både omfatter urindividene og mengdene. Tilsvarende bemerkninger gjelder for ∂;æ. Ved denne intepretasjonen representerer Q+ = UN/d<æ/(Q(d,0)) mengden av urindivider i modellen. K+ – Q+ representerer klassen av mengder mens det er meningen at K+ skal representere det totale univers i modellen.

§8 Noen viktige egenskaper til intepretasjonene.

Det er en forholdsvis enkel sak å vise at hvis P er et logisk aksiom i ZFC;u(L;e) så er ∂;t(P) og ∂;æ(P) teoremer i ZFC. ∂;t(P) og ∂;æ(P) kan i så fall være enten rent kvantifikasjonsteoretiske teoremer i ZFC eller teoremer som utelukkende kan bevises på grunnlag av de logiske aksiomene, definisjonen av identitet og ekstensjonalitetsaksiomet. Det er også lett å se at hvis ∂;t(P) og ∂;t(P–>Q) er teoremer i ZFC+I så er også ∂;t(Q) og ∂;t((Ax)P) teoremer i denne teorien. En detaljert verifikasjon av disse påstandene, om dette ønskes, overlates til leseren. Vi sammenfatter dette i det følgende teorem:

Teorem III: (a) Er P et logisk aksiom i ZFC;u(L;e) er ∂;t(P) og ∂;æ(P) teoremer i ZFC og dermed i ZFC+I

(b) Er P,QêFm(L;e) og har man at ∂;t(P) og ∂;t(P–>Q) er teoremer i ZFC (ZFC+I) er også ∂;t(Q) og ∂;t((Ax)P)) teoremer i ZFC (ZFC+I). Det samme gjelder intepretasjonen ∂;æ.

Beviset for det neste teoremet utgjør det viktigste leddet i vårt bevis for Teorem II:

Teorem IV: (a) Anta $0<t\leq w$ og at P er en av formlene M1 – M12. Da er ∂;t(P) et teorem i ZFC+I.

(b) Er P en av formlene M1, M3 – M12 er ∂;æ(P) et teorem i ZFC+I.

(c) Er P = Ur6 så er ∂;æ(P) et teorem i ZFC+I.

(d) Er P enten Ur1, Ur2(n) for noe $n\geq 1$, Ur4 eller Ur5 så har man at ∂;w(P) er et teorem i ZFC + I.

(e) Er P formelen Ur3(n) for fiksert $n\geq 1$ har man at ∂;n(P) er et teorem i ZFC+I.

Det er temmelig lett å se at man fra Teorem III og Teorem IV kan utlede Teorem II. Vi overlater det til leseren å forklare hvorfor. Det som gjenstår for at vi skal kunne sies å ha gjennomført vårt projekt er derfor å gi bevis for de enkelte punkter i Teorem IV. Dette er hva vi i detalj vil gjøre i de neste paragrafer. Egentlig byr ikke beviset for Teorem IV på egentlig betydningsfulle og prinsipielt vanskelige problemer. Men beviset er langt og arbeidskrevende. Man må – noe man sikkert ser – for minst 18 formler i L;e (i) oversette dem til L ved hjelp av en passende intepretasjon i familien ∂;t, eventuelt ved hjelp av ∂;æ og (ii) vise at alle disse oversettelsene er teoremer i ZFC+I.

***

*

Del II

Detaljerte bevis

*

§9

I denne delen av dette arbeidet vil det bli etablert en rekke satser som er til hjelp når man vil formulere beviset for Teorem 4. Beviset for denne satsen vil bli gjennomført helt tilslutt.

Først gis det bevis for endel generelle satser om strukturen <Q(d,a)>/aêOn/. Vi starter med:

Teorem 1 (a) $d \leq a \rightarrow Pt(Q(d,0)) \Omega Q(d,0) = ø$
(b) $d;1 \leq d;2 < æ \rightarrow Pt(Q(d;1,0)) \Omega Q(d;2,0) = ø$
(c) $d;1 \leq d;2 \rightarrow Q(d;1,0)$ Inkl $Q(d;2,0)$

Bevis: Ad (a). Anta (1) d<æ og anta for reduktio ad absurdum at det finnes x der (2) xêPt(Q(d,0)) & xêQ(d,0). Det er da to muligheter: *Tilfelle (i)* (3) x=ø. Fra den andre konjunkten i (2) og definisjonen av Q(d,0) følger at x= <a,æ> for noe aêd. Dette impliserer imidlertid, siden <a,d>={{a},{a,d}} at {a}êx og derfor at (Ey)(yêx). Dette strider åpenbart mot (3). *Tilfelle (ii)* x≠ø. I så fall finnes det noe y der (4) yêx. Fra den andre konjunkten i (2) følger (5) x=<a,æ> for noe aêd. Fra den første konjunkten i (2) kan man slutte: (6) x Inkl Q(d,0). Fra (4) og (6) følger yêQ(d,0), og følgelig at det finnes b der (7) y=<b,æ> & bêd. Man må ha at b≠a, for ellers følger y=x fra (5) og (7). Dette ville sammen med (4) implisere xêx som åpenbart er umulig. Man kan altså konstatere at (8) a≠b. Siden x=<a,æ> = {{a},{a,æ}} følger ved hjelp av (4), (5) og (7) at

(9) <b,æ> = {a} v <b,æ> = {b,æ}

I det første tilfellet følger at {{b},{b,æ}}={a}. Dette innebærer at {a}={b,æ} som i sin tur innebærer at æ=a. Men da må man ha æ=a<d<æ som er umulig. I det andre tilfellet har man {{b},{b,æ}}= {a,æ}. I så fall har man {b,æ}ê{a,æ}. Det følger at {b,æ}=a eller {b,æ}=æ. I det første tilfelle har man æêa<d<æ og derfor æ<æ som er absurd. I det andre tilfelle følger æêæ som er absurd i lys av Fundierungsaksiomet. Dette avslutter beviset for (a)

Ad (b). Anta d;1≤d;2<æ. Er d;1=d;2 følger satsen fra det som ble bevist under punkt (a). Anta derfor d;1<d;2. Da har man Q(d;1,0) Inkl Q(d;2,0) i følge punkt (c). Derfor Pt(Q(d;1,0)) Inkl Pt(Q(d;2,0)). Fra punkt (a) følger

Pt(Q(d;2,0)) Ω Q(d;2,0) = ø

Men dette og (1) impliserer Pt(Q(d;1,0)) Ω Q(d;2,0) = ø som er det vi ønsker.
Ad (c). Anta d;1 ≤ d;2 og at xêQ(d;1,0) for en eller annen vilkårlig entitet x. Da har man x=<a,æ> der aêd;1. Det følger i så fall at a<d;1≤d;2 og derfor at a<d;2. Herav har man aêd;2. Men dette, det at x=<a,æ> og definisjonen av Q(d,0) gir en xêQ(d;2,0). Det følger at Q(d;1,0) Inkl Q(d;2,0). Dette avslutter beviset for
Teorem 1. **QED**

Teorem 2 d<æ –> (Aa)(aêOn –> a Inkl Q(d,a))

Bevis: Anta (1) d<æ. Setningen bevises ved induksjon på a. (i) Er a=0 har man åpenbart at a=ø Inkl Q(d,0) = Q(d,a). (ii) Anta satsen holder for alle b<a og at a=g+1. Da g<a. I følge induksjonshypotesen har man i så fall (2) g Inkl Q(d,g). Nå er det klart at (3) a=g+1= gU{g}. Anta for vilkårlig x at xêa. I følge (3) har man xêgU{g}. Er xêg har ved hjelp av (2) at

xêQ(d,g) Inkl Q(d,g) U Pt(Q(d,g)) = Q(d,g+1) = Q(d,a)

Er på den annen side x=g følger fra (2) at gêPt(Q(d,g)) og man har da:

xêPt(Q(d,g)) Inkl Q(d,g) U Pt(Q(d,g)) = Q(d,g+1) = Q(d,a)

Påstanden holder altså i begge tilfelle. (iii) Anta aêK;II. Da har man

(4) Q(d,a) = UN/b<a/(Q(d,b)). Nå har man siden aêK;II at a=UN(a). Anta for vilkårlig x at xêa. Da må man altså ha xêUN(a). Dette innebærer at det må finnes bêOn slik at xêb & bêa. Siden aêOn følger videre xêb<a. Ved hjelp av induksjonshypotesen kan man da slutte:

xêb Inkl Q(d,b) Inkl UN/b<a/(Q(d,b)) = Q(d,a). Siden x var et vilkårlig element i a følger a Inkl Q(d,a). Man ser at setningen også holder om aêK;II. **QED**

Teorem 3 d<æ –> (Aa)(aêOn –> Cd(a) ≤Cd(Q(d,a)))

Bevis: Teorem 3 følger umiddelbart fra Teorem 2 og den følgende setning:

(+) (Ax)(Ay)(x Inkl y –> Cd(x) ≤ Cd(y))

Man kan i denne forbindelse studere Takeuti [1], Teorem 11.5. Det bør forøvrig bemerkes at man i beviset for (+) benytter utvalgsaksiomet. **QED**

Teorem 4 Anta d<æ og at aêK;II. Da gjelder:

UN/b<a/(Cd(Q(d,b))) = Cd(UN/b<a/(Q(d,b)))

Bevis: (a) I følge Takeuti [1], Teorem 7.21 har vi:

(T1) (A Inkl On & (Ab)(bêA –> b≤a)) –> UN(A) ≤a

Nå har man hvis b<a at bêOn (siden a,bêOn). Da følger:

Q(d,b) Inkl UN/b<a/(Q(d,b))

Herav kan man så slutte: (1) (Ab)(bêa –> Cd(Q(d,b)) ≤ Cd(UN/b<a/(Q(d,b)))).

Siden Cd(Q(d,b))êOn for alle bêa følger (1.1) Mg(Cd(Q(d,b)): bêa) Inkl On. Det følger da ved hjelp av (1) at man må ha:

(2) (Ag)(gêMg(Cd(Q(d,b)): bêa) –> g≤Cd(UN/b<a/(Q(d,b))))

Fra (1.1), (2), samt prinsippet T1 følger om vi i T1 setter A=Mg(Cd(Q(d,b)): bêa) og a=Cd(UN/b<a/(Q(d,b))) at:

(3) UN(Mg(Cd(Q(d,b)):bêa)) = UN/b<a/(Cd(Q(d,b))) ≤ Cd(UN/b<a/(Q(d,b)))

Dette viser at den ene halvdelen av teoremet holder.

(b) Definer en mengde g ved: (1) g= Mg(<b,Cd(Q(d,b))>: bêa). Man kan da lett vise at (2) Func(g) & Dom(g) =a. Vi har da også at:

(3) (Ax)(xêDom(g) –> g(x)êCard)

Fra Takeuti [1], Teorem 10.68 har man:

(T2) f: a –>Card –> UN(f‘‘a)êCard

Det følger fra (2), (3) og teoremet T2 at:

UN(g‘‘a) = UN(Mg(Cd(Q(d,b)):bêa))= UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))êCard

Med andre ord har vi at: (4) UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))êCard. Nå har man:

(5) (Ab)(b<a –> Cd(Q(d,b)) Inkl UN/b<a/(Cd(Q(d,b))))

Siden vi i følge (4) har at UN/b<a/(Q(d,b)) er et kardinaltall har vi:

(6.1) Cd(Cd(Q(d,b))) = Cd(Q(d,b)) og

(6.2) Cd(UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))) = UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))

Fra (5), (6.1), (6.2) og Teorem 11.5 i Takeuti [1] som sier at:

(Ax)(Ay)(x Inkl y –> Cd(x) ≤Cd(y)) følger:

(7) (Ab)(b<a –> Cd(Q(d,b)) ≤ UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))).

Definer nå F ved (+) F= Mg(<b,Q(d,b)>: bêa) Man ser fort at F er en entydig relasjon, mao. at Un(F). Teorem 11.12 i Takeuti [1] lyder slik:

(T3) Un(F) & (Ay)(yêb –>Cd(F(y))≤Cd(a)) –> Cd(UN(F‘‘b)) ≤Cd(aXb)
Siden vi har at Un(F) når F defineres som ved (+) følger fra definisjonen F, (7) og T3 at:
(8) Cd(UN/b<a/(Q(d,b)))≤Cd(UN/b<a/(Cd(Q(d,b))) X a)
Nå har vi tidligere bevist: (T4) (Aa)(aêOn –> Cd(a) ≤ Cd(Q(d,a))). Det følger siden aêK;II at Q(d,a)=UN/b<a/(Q(d,b)). Fra T4 har vi sammen med (7):
(9) (Ab)(b<a –> Cd(b)≤Cd(Q(d,b) < UN/b<a/(Cd(Q(d,b))))
For anta b<a. Siden aêK;II har vi da at b+1<a. Det følger i så fall at:
Cd(Q(d,b)) < Cd(Q(d,b+1))=Cd(Q(d,b)UPt(Q(d,b)))≤UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))
siden man generelt har at Cd(x) ≤Cd(Pt(x)). (Cantors sats) Dette viser at (9) holder. I følge Takeuti [1], Teorem 10.31 har man:
(T5) (Aa)(Ab)(a,bêOn –>(Cd(a)<Cd(b) <–> a<Cd(b)))
Fra T5 og (9) følger: (10) (Ab)(b<a –> b≤UN/c<a/(Cd(Q(d,c)))). Fra dette og prinsippet T1 ovenfor følger så videre:
(11) UN(a)≤UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))
Men aêK;II og da har man a=UN(a). Det følger fra dette og (11) at
(12) a≤UN/b<a/(Cd(Q(d,a))) og siden Cd(a)≤a har vi:
(13) Cd(a) ≤UN/b<a/(Cd(Q(d,b)))
Siden Cd(aXb)= Max(Cd(a),Cd(b)) om Cd(a)≥w & Cd(b)>0 følger fra (8) og (13):
(14) Cd(UN/b<a/(Q(d,b))) ≤ UN/b<a/Cd(Q(d,b)).
Dette, sammen med (3) under punkt (a), gir oss det vi ønsker. **QED**

Teorem 4 brukes i beviset for det neste teoremet, Teorem 5. Ved hjelp av denne satsen beviser vi så i sin tur en rekke setninger som vil bli brukt senere i dette arbeidet.

Teorem 5 d<æ –> (Aa)(a<æ –> Cd(Q(d,a)) <æ)

Bevis: Det skulle være overflødig å minne om at "æ" betegner det minste utilgjenelige kardinaltallet. Anta (+) d<æ. Teoremet bevises ved transfinit induksjon på a. (i) Anta a=0<æ. Da har man:
Q(d,a) = Q(d,0) = {<x,æ>: xêd}= dX{æ}
I lys av forutsetningen (+) må man derfor ha:
Cd(Q(d,a)) = Cd(dX{æ}) = Cd(d)≤ d ≤ æ. Satsen holder derfor i dette tilfellet.
(ii) Anta a=b+1<æ for noe b og anta dessuten at setningen holder for b, det vil si at (1) Cd(Q(d,b)) <æ. Da har man: Q(d,a)= Q(d,b+1) = Q(d,b)UPt(Q(d,b)). Dette følger ved hjelp av definisjonen av "Q(d,a)". På grunnlag av dette kan man slutte: Cd(Q(d,a)) = Cd(Q(d,b)UPt(Q(d,b))). Siden Pt(Q(d,b)) » Q(d,b) og man dessuten har at Cd(aUb) = Max(Cd(a),Cd(b)) følger (2) Cd(Q(d,a)) = Cd(Pt(Q(d,b))). Siden æ er et utilgjengelig kardinaltall har vi per definisjon av "utilgjengelig kardinaltall" at (Ax)(Cd(x) <æ –> Cd(Pt(x)) <æ) Fra dette og (1) utleder man
Cd(Pt(Q(d,b)))<æ. Dette impliserer det man ønsker, nemlig Cd(Q(d,a))<æ, sammen med (2).
(iii) Anta (1) a<æ og at aêK;II. Anta dessuten at satsen holder for alle b<a. Da har man ved hjelp av definisjonen av Q(d,a) at
(1.1) Q(d,a) = UN/b<a/(Q(d,b)).
Sett nå per definisjon: (2) F;d = Mg(<b,Q(d,b)>: b<a). Det skulle være lett å se at man har: (3) Func(F;d) & Dom(F;d)=a. Teorem 11.12 i Takeuti [1] er den følgende formulering:
(3+) Un(F) & (Ay)(yêb –> Cd(F(y))≤Cd(a)) –> Cd(UN(F‘‘b))≤Cd(aXb)
Fra induksjonshypotesen har man: (4) (Ab)(b<a –> Cd(Q(d,b))<æ). Siden æêN'=(N-w) har man ved hjelp av Takeuti [1], Teorem 10.38 at æ=Cd(æ). Fra dette og (4) følger (5): (Ab)(b<a –> Cd(Q(d,b)) < Cd(æ)). Fra (2) og (3) følger

F;d(b)= Q(d,b) og derfor Cd(F;d(b)) = Cd(Q(d,b)). Dette og (5) impliserer:

(7) (Ab)(b<a –> Cd(F;d(b)) ≤Cd(æ)).

Fra (7), (3) og prinsippet (3+) følger så: (8) Cd(UN(F;d ‘‘a)) ≤ Cd(æXa)

I lys av Teorem 10.35 i Takeuti [1] har man:

(9) Cd(æXa) = Max(Cd(æ), Cd(a)) = Cd(æ) siden a<æ.

Fra (8) og (9) kan man derfor utlede: (9.1) Cd(UN(F;d ‘‘a)) ≤ Cd(æ). Fra (2) følger (10) UN(F;d ‘‘a) = UN/b<a/(Q(d,b)). Fra dett, (1.1) og (9.1) utleder man at:

(11) Cd(Q(d,a)) = Cd(UN/b<a/(Q(d,b))) ≤Cd(æ) = æ.

Man ser at det nå det som nå må bevises er at Cd(UN/b<a/(Q(d,b))) < æ.

Definer en funksjon g;d ved : (12) g;d= Mg(<b,Cd(Q(d,b))>: b<a). Det er lett å vise at (13) Func(g;d) & Dom(g;d) = a og dessuten at (14) (Ey)(y = g;d). Det følger at man har: (15) g;d Fn a.[1] Siden vi forutsetter at aêK;II har man selvsagt også at (16) aêK;II & g;d Fn a. Det skulle også være klart at (17) Rgn(g;d) Inkl On. g;d er derfor det som i Takeuti [1] kalles for en ordinaltallsfunksjon. (Se Takeuti [1], Definisjon 7.44, side 44). Det vil først bli bevist at denne er strengt monoton, dvs.: (18) (Ak;1)(Ak;2)(k;1<k;2 <a –> g;d(k;1) < g;d(k;2))

Som man ser fra definisjonen av g;d har man at g;d(b) = Cd(Q(d,b)) om b<a. (18) er derfor ekvivalent med:

(19) (Ak;1)(Ak;2)(k;1<k;2<a –> Cd(Q(d,k;1)) < Cd(Q(d,k;2)))

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (19).

Anta derfor at k;1,b er vilkårlige ordinaltall som er slik at (20) k;1<b<a. Det er da to muligheter vedrørende b. *Tilfelle (i)*: bêK;I. Da har vi b= k;2+1 for noe k;2. Det følger at k;1<k;2+1 og derfor k;1≤k;2. Videre følger:

Q(d,b) = Q(d,k;2+1) = Q(d,k;2)U Pt(Q(d,k;2). Siden Q(d,k;1) Inkl Q(d,k;2) har man Cd(Q(d,k;1)) ≤ Cd(Q(d,k;2)). Defor følger:

(22) Cd(Q(d,b)) = Cd(Q(d,k;2)UPt(Q(d,k;2))) =

Max(Cd(Q(d,k;2)), Cd(Pt(Q(d,k;2))))= Cd(Pt(Q(d,k;2)))>

Cd(Q(d,k;2)) ≥Cd(Q(d,k;1))

Man bør her konsultere Takeuti [1], Teorem 10.35, siden denne satsen anvendes på dette punkt. Fra (22) følger Cd(Q(d,k;1)) < Cd(Q(d,b)) som er det vi ønsker.

Tilfelle (ii) : bêK;II. Siden k;1<b har man da at k;1<k;1+1<b. Dette følger fra en velbekjent setning om ordinaltall. Det følger at:

Q(d,k;1) Inkl Q(d,k;1)UPt(Q(d,k;1)) =

Q(d,k;1+1) Inkl Q(d,b) = UN/a<b/(Q(d,a))

Men da har man har man Cd(Q(d,k;1)) < Cd(Q(d,k;1)UPt(Q(d,k;1))) ≤Cd(Q(d,b))

(19) holder derfor også i dette tilfelle. Dette avslutter beviset for (19) og derfor også for (18)

Fra (15), (17) og (19) har man (23) Smo(g;d). (Jmf. Definisjon 7.44 i Takeuti [1]). Fra (23) og (16) kan man trekke den slutning at:

(24) aêK;II & g;d Fn a & Smo(g;d)

Teorem 10.58 i Takeuti [1] erden følgende sats:

(T) a'êK;II & f Fn a' & Smo(f) & b'=UN(f‘‘a') –> Cof(b',a')

Anta nå for reduktio ad absurdum at

(#) æ= UN(g;d ‘‘ a)= UN/b<a/(Cd(Q(d,b))).

Fra (+), (24) og (T) følger da at Cof(æ,a). Men a<æ og æ er et regulært kardinaltall. Siden æ er regulært er det minste ordinaltall som er cofinalt med æ. æ selv. Men da er det umulig at Cof(æ,a) & a<æ. Det følger at (#) ikke holder og at man har:

æ ≠ UN/b<a/(Cd(Q(d,b))). Men fra Teorem 4 har vi:

UN/b<a/(Cd(Q(d,b))) = Cd(UN/b<a/(Q(d,b))). Det følger derfor at:

---

[1] Her bør definisjonen av uttrykket " f Fn b" settes inn i denne fotnoten.

æ ≠ Cd(UN/b<a/(Q(d,b)). Dette og (11) impliserer imidlertid at

Cd(Q(d,a)) = Cd(UN/b<a/(Q(d,b))) <æ som nettopp er det vi her vil frem til. Dette avslutter beviset. **QED**.

Teorem 6 d<æ –> (Aa)(a<æ –> ¬(æêQ(d,a))

Bevis: Setningen bevises ved induksjon på a. (i) Anta a=0. Da er Q(d,a) = Q(d,0) = {<x,æ>: xêd}. Anta mot formodning at æêQ(d,0). Da har man æ = <x,æ> for noe xêd. Det følger ar æê{x,æ}ê<x,æ>=æ. Dette innebærer at æ<æ som åpenbart er umulig. (ii) Anta a=b+1 og at satsen holder for alle b<a. Da har man :

Q(d,a) = Q(d,b)UPt(Q(d,b)). Anta for reduktio ad absurdum at æêQ(d,a). Da har man enten æêQ(d,b) eller æêPt(Q(d,b)). Det første tilfellet er imidlertid utelukket i lys av induksjonshypotesen. Derfor har vi æêPt(Q(d,b)), dvs. at
æ Inkl Pt(Q(d,b)). Men i dette tilfelle har man æ=Cd(æ) ≤Cd(Q(d,b)). Dessuten er det tilfelle at b<a<æ. Dette strider mot at Cd(Q(d,b))<æ som følger ved hjelp av Teorem 5. (iii) Anta aêK;II. Da har man: Q(d,a) = UN/b<a/(Q(d,b)). Antar man da at æêQ(d,a) følger æêQ(d,b) for noe b<a<æ. Men i følge induksjons-hypotesen er dette umulig. **QED.**

Teorem 7 Anta d,a<æ og at {x,y}ê(Q(d,a) – Q(d,0)). Da gjelder:
(Eb)(b<a & yêQ(d,b))

Bevis: Anta (1) d,a<æ & {x,y}ê(Q(d,a)-Q(d,0)). Man har da {x,y}ê(Q(d,a)-Q(d,0). Betrakt Mg(h: {x,y}êQ(d,h)-Q(d,0) & h<æ) Det må finnes et minste ordinaltall i denne mengden. La oss kalle det b;0. Man har i så fall:

(2) b;0 = μa({x,y}ê(Q(d,a)-Q(d,0)) & a<æ)

Det er nå to muligheter angående b;0: Tilfelle (i): b;0êK;II. Man har da {x,y}êQ(d,b;0) = UN/c<b;0/(Q(d,c)). Det følger at det må finnes c der:

{x,y}ê(Q(d,c)-Q(d,0)) & c<b;0<æ. Dette strider imidlertid mot (2). Dette tilfellet er derfor utelukket. Tilfelle (ii): b;0êK;I. Da har man b;0=0 eller at b;0=c+1 for noe c. (Se definisjon 7.27 i Takeuti [1].) I dette har man

Q(d,b;0) = Q(d,c)UPt(Q(d,c))

Man kan jo ikke ha b;0=0 for da {x,y}ê(Q(d,0)- Q(d,0)) =ø som er umulig. Siden {x,y} êQ(d,b;0) har man enten {x,y}êQ(d,c) eller {x,y}êPt(Q(d,c)). I det første tilfellet har man {x,y}êQ(d,c) der c<b;0<æ. Dette strider imidlertid mot (2). I det andre tilfellet følger {x,y} Inkl Q(d,c). Da har man yê{x,y} Inkl Q(d,c) & c<b;0≤a≤æ. Det følger at (Eb)(b<a & yêQ(d,b)). Dette er hva man ønsker. **QED**.

Teorem 8 (a) Anta d<æ. Da gjelder: (Aa)(a<æ –> Pt(Q(d,a))ΩQ(d,0)=ø)
(b) Anta d;1,d;2<æ. Da gjelder:
(Aa)(a<æ –> Pt(Q(d;1,a)) Ω Q(d;2,0) = ø)

Bevis: Man ser at (a) er et spesialtilfelle av (b). Det gis derfor bare et bevis for punkt (b). Anta (1) d;1,d;2<æ. Tre forskjellige tilfelle studeres:

(i) a=0. I så tilfelle må det bevises at Pt(Q(d;1,0)) Ω Q(d;2,0) = ø. Er d;1≤d;2 følger dette fra Teorem 1, punkt (a) og (b). Har man d;2<d;1 følger d;2≤d;1 og i så fall har man (2) Q(d;2,0) Inkl Q(d;1,0) i lys av punkt (c) i Teorem 1. Men fra Teorem 1, punkt (a), og det at d;1<æ følger Pt(Q(d;1,0)) Ω Q(d;1,0) =ø. Fra dette og (2) følger åpenbart: Pt(Q(d;1,0) Ω Q(d;2,0) =ø.

(ii) Anta aêK;II og anta enn mer at det finnes x;0 der :

(1) x;0êPt(Q(d;1,0)) & x;0êQ(d;2,0).

Fra den siste konjunkten i (1) følger (2) x;0=<y,æ> for noe yêd;2. Fra den første konjunkten i (1) følger videre: (3) x;0 Inkl Q(d;1,a). Fra (2) og (3) følger: (4) {y,æ}êx;0 Inkl Q(d;1,a) og derfor at (5) {y,æ}êQ(d;1,a). Anta nå mot formodning at {y,æ}êQ(d;1,0). Det følger da at {y,æ}=<z,æ> for noe zêd;1. Herav har man: {y,æ}= {{z},{z,æ}}, og fra dette følger {z,æ}ê{y,æ}. Herav har man enten {z,æ}=y som impliserer det absurde æ<yêd;2<æ eller {z,æ}=æ som impliserer det like absurde æêæ. Man har derfor at {y,æ}ê(Q(d;1,a) - Q(d;1,0)). Siden d;1,a<æ følger da ved hjelp av Teorem 7 at æêQ(d;1,b) for noe b<a<æ. Men dette strider mot Teorem 6. Det følger at Pt(Q(d;1,a))ΩQ(d;2,0) = ø. (iii) aêK;I. I dette tilfellet går man frem på samme måte som i det foregående tilfelle. **QED.**

Teorem 9 (a) Anta d<a og at xê(UN/a<æ/(Q(d,a)) – Q(d,0)). Anta videre at c= µb(xêQ(d,b) & b<æ). Da gjelder:

(Eb)(c=b+1 & x Inkl Q(d,b))

(b) Definer K+ og Q+ ved:

(1) K+=UN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a)))

(2) Q+ = UN/d<æ/(Q(d,0))

Da har man om xê(K+ – Q+) og xêQ(d,b) for noen b,d<æ og c;1= µb(xêQ(d,b)& b<æ) at: (Eb)(c;1=(b+1) & x Inkl Q(d,b)).

Bevis: Ad (a). Anta:

(1) d<a & xêUN/a<æ/(Q(d,a)) – Q(d,0) & c= µb(xêQ(d,b) & b<æ)

Fra dette følger (2) xêUNb<æ/(Q(d,b) & ¬(xêQ(d,0)). Fra (2) og den siste konjunkten i (1) følger: (3) xêQ(d,c) & c<æ & ¬(xêQ(d,0))

Tilfelle (i): Anta cêK;II. Da har man xêQ(d,c)= UN/b<c/(Q(d,b)). Da følger xêQ(d,b) & b<c<æ. Men dette strider mot at c skal være det minste ordinaltall hvor de to første konjunktene i (3) holder. Dette tilfellet er derfor utelukket.

Tilfelle (ii): c=0 v c=b+1 for noe bêOn. Fra (3) følger at c≠0. Derfor har man c=b+1 for noe bêOn. Dette innebærer at xêQ(d,c)=Q(d,b+1) = Q(d,b)UPt(Q(d,b)). Har man da xêQ(d,b) følger xêQ(d,b) & b<c<æ som igjen strider mot at c skal være det minste ordinaltallet der de to første konjunktene i (3) holder. Man må derfor ha x Inkl Q(d,b) og at c=b+1 for noe b. Men dette er nøyaktig hva som ønskes.

Ad (b). Punkt (b) bevises på nøyaktig samme måte som punkt (a). Man bemerker bare at hvis ¬(xêQ+) så har man ¬(xêUN/d<æ/(Q(d,0))). Dette innebærer at (Ad)(d<æ –> ¬(xêQ(d,0))). Man kan så bruke det som står under foregående punkt. **QED.**

Som et korollar til Teorem 9 har man at den følgende sats holder:

Teorem 10. (a) yê(K+ – Q+) & xêy –> xêK+

(b) xê(K+ – Q+) –> x Inkl K+

(c) d<æ –> (yê(Q(d,æ) -Q(d,0)) & xêy –> xêQ(d,æ))

(d) d<æ –> (xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –> x Inkl Q(d,æ))

Bevis: Ad (a) og (b): Anta yê(K+ – Q+) og at yêx. Det følger at yêUN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a))) og derfor at yêQ(d,a) for noen ordinaltall d,a<æ. Da vil det finnes et ordinaltall c der c=µa(yêQ(d,a)& a<æ). I følge Teorem 9 har man i så fall at y Inkl Q(d,b) for noe b<æ & d<æ. Da følger:

y Ink UN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a))) = K+. Fra dette og det at xêy følger xêK+. Dette viser at punkt (a) og (b) holder. Punktene (c) og (d) i teoremet bevises ved hjelp av Teorem 9 (a) på nøyaktig den samme måten. **QED.**

I forbindelse med Teorem 10 er det naturlig å nevne den følgende setning:

Teorem 11. (a) yêQ(d,æ) & (Ax)(xêy –> xêQ(d,æ)). –> yê(Q(d,æ) – Q(d,0))
(b) yêK+ & (Ax)(xêy –> xêK+). –> yê(K+ – Q+)

Bevis: (a) Anta (1) yêQ(d,æ) & (Ax)(xêy –> xêQ(d,æ)). Det er to muligheter. *Tilfelle (i)*: y=ø. Siden vi har

y=øêPt(Q(d,0)) Ink Q(d,1)= Q(d,0)U Pt(Q(d,0)) Inkl
UN/a<æ/(Q(d,a)) = Q(d,æ)

og vi tillike har Pt(Q(d,0)) Ω Q(d,0)=ø (Jmf. Teorem 1) følger yê(Q(d,æ) – Q(d,0)). *Tilfelle (ii)*: y≠ø. Da finnes det z der (2) zêy. Anta for reduktio ad absurdum at (3) ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0))). Fra dette og (1) følger (4) yêQ(d,0). Dette og definisjonen av Q(d,0) impliserer at det finnes noe r slik at (5) y=<r,æ> & rêd. Da har man {r,æ}ê<r,æ>êy. Fra dette og den andre konjunkten i (1) følger:
(6) {r,æ}êQ(d,æ). Dette innebærer at {r,æ}êQ(d,c) for noe c<æ. Anta nå for reduktio ad absurdum at {r,æ}êQ(d,0). Da finnes det r;2êd slik at {r,æ}=<r;2,æ>. Det følger at {r,2,æ} ê{r,æ} og derfor at {r;2,æ}=r eller {r;2,æ}=æ. I det første tilfelle har vi det absurde at æêr<d<æ. I det andre tilfelle følger det like absurde at æ<æ. Det følger at (7) ¬({r,æ} êQ(d,0)). Fra (6) og (7) følger at {r,æ}ê(Q(d,æ)–Q(d,0)) som sammen med Teorem 7 impliserer at æêQ(d,a) for noe a<æ. Dette strider mot Teorem 6. Det følger at (3) ovenfor leder til en motsigelse og at man derfor har yê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Dette viser at punkt (a) i teoremet holder.

(b) Anta (1) yêK+ & (Ax)(xêy –> xêK+). Siden yêK+ har man per definisjon at det finnes d,a der (2) d,a<æ & yêQ(d,a). Det er igjen to tilfelle som det er nødvendig å sondre mellom. *Tilfelle (i)*: y=0. Da har man åpenbart at yêPt(Q(d,0)) Inkl K+. Vi må i så fall vise at y ikke er med i Q+. Anta for reduktio ad absurdum at øêQ+. Da finnes det d slik at øêQ(d,0). Men da har man ø=<y,æ> for noe yêd. Herav {y}ê<y,æ>=ø som er absurd. *Tilfelle (ii)*: y≠ø. Anta for reduktio ad absurdum at (3) ¬(yê(K+ – Q+)). Fra dette og (1) følger yêQ+. Dette innebærer per definisjon at yêQ(d;1,0) for noe d;1. Dette impliserer så i sin tur at y=<r,æ> for noe rêd;1. Fra dette og (2) har man <r,æ>êQ(d,a). Anta for reduktio ad absurdum at {r,æ}êQ(d,0). Da har man {r.æ}=<r;1,æ> for noe r;1êd. Det følger da at {r;1,æ}ê{r,æ}. Men dette leder som vist under punkt (a) til absurditeter siden r;1<d<æ og r<d<æ. Man må derfor ha at ¬({r,æ}êQ(d,0)). Dette innebærer at {r,æ}ê(Q(d,a) – Q(d,0)). Da følger ved hjelp av Teorem 7 at æêQ(d,b) for noe b<a<æ. Men dette er umulig i følge Teorem 6. Det følger at (3) er usann og derfor at yê(K+ – Q+). **QED.**

Selvom vi ikke kan se at de følgende teoremer blir brukt i beviset for senere setninger synes de ikke desto mindre å være av såpass stor prinipiell betydning at de bør nevnes med bevis:

Teorem 12. Anta d<æ. Da gjelder: (Aa)(aêOn –> Q(d,a) Inkl Q(d+1,a))

Bevis: Beviset er ved transfinite induksjon på a. (i) a=0. Anta xêQ(d,0). Da har man x=<r,æ> der rêd. Da rê(d+1) og man må følgelig i lys av definisjonen av "Q(d,a)" ha at xêQ(d+1,a). (ii) a=b+1. Fra induksjonshypotesen har man da:

(1) Q(d,b) Inkl Q(d+1,b) Vi har videre (2) Q(d,b+1)= Q(d,b)UPt(Q(d,b)). Anta nå for vilkårlig x at xêQ(d,b+1) Da har man enten at xêQ(d,b) eller at x Inkl Q(d,b). I tilfelle xêQ(d,b) følger ved hjelp av (1) at:

xêQ(d+1,b) Inkl Q(d+1,b)UPt(Q(d+1,b)) = Q(d+1,a)

Er på den annen side x Inkl Q(d,b) følger ved hjelp av (1) at x Inkl Q(d+1,b). Dette innebærer at xêPt(Q(d+1,b)) Inkl Q(d+1,b)UPt(Q(d+1,b))= Q(d+1,a). I begge tilfelle holder påstanden. (iii) aêK;II. Er da xêQ(d,a) har man xêQ(d,b) for noe b<a. Ved hjelp av induksjonshypotesen følger da:

xêQ(d+1,b) Inkl U/b<a/(Q(d+1,b)) = Q(d+1,a)

Dette viser at satsen holder. **QED.**

Som et korollar til Teorem 12 har man:

Teorem 13. Anta d<a. Da gjelder: Q(d,æ) Inkl Q(d+1,æ)

Bevis: Opplagt, siden ææOn. **QED.**

Vi kan også bevise noe mer enn Teorem 12, nemlig den følgende sats:

Teorem 14. Anta 0≤d;1 ≤d;2 <æ. Da har man:

(Aa)(aêOn –> Q(d;1,a) Inkl Q(d;2,a))

Bevis: Man får et bevis for denne setningen ved bare å erstatte alle forekomster av uttrykket "d+1" i beviset for Teorem 12 med "d;2". Tilsvarende kan alle forkomster av "d" erstattes med "d;1". Leseren kan selv sjekke riktigheten av dette. **QED.**

Vi nevner også det følgende teorem:

Teorem 15. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

r;1,r;2êQ(d,æ) –> {r;1},{r;1,r;2}ê(Q(d,æ) – Q(d,0))

(b) r;1,r;2êK+ –> {r;1},{r;1,r;2}ê(K+ – Q+)

Bevis: (a) Anta r;1,r;2ê Q(d,æ). Da har man r;1êQ(d,c;1) for noe c;1<æ og r;2êQ(d,c;2) for noe c;2<æ. La a=Max(c;1,c;2). Da følger det at r;1,r;2êQ(d,a) og derfor at {r;1},{r;1,r;2} Inkl Q(d,a). Det følger videre at:

{r;1},{r;1,r;2}êPt(Q(d,a)) Inkl Q(d,a)UPt(Q(d,a)) = Q(d,a+1)

Siden a<æ har man at a+1<æ. I lys av dette må man ha:

{r;1},{r;1,r;2}êQ(d,æ) = UN/b<æ/(Q(d,b))

Siden {r;1},{r;1,r;2}êPt(Q(d,a)) for noe aêOn og man ifølge Teorem 8 har at Pt(Q(d,a))Ω Q(d,0) = ø følger det at {r;1},{r;1,r;2}ê(Q(d,æ) – Q(d,0)).

(b) Anta r;1,r;2êK+. Da finnes d;1,d;2 <æ og c;1,c;2<æ slik at r;1êQ(d;1,c;1) & r;2êQ(d;2,c;2). La d= Max(d;1,d;2) og c= Max(c;1,c;2). Ved hjelp av Teorem 14 og det forhold at Q(d,f) Inkl Q(d,h) om f≤h følger det at r;1,r;2êQ(d,c). Siden Max(d;1,d;2), Max(c;1,c;2)+1 <æ følger det videre at:

(1) {r;1},{r;1,r;2}êQ(d,c+1) Inkl K+.

Anta på den annen side for reduktio ad absurdum at {r;1}êQ+. (eventuelt at {r;1,r;2}êQ+). I så fall følger {r;1}êQ(d;3,0) for noe d;3<æ. Men i lys av (1) har man at (3) {r;1} êPt(Q(d,c). Fra (2) og (39 og Teorem 8,b følger da en motsigelse. Et tilsvarende resonnement kan benyttes i forbindelse med {r;1,r;2}. **QED.**

Det er også av interesse å nevne den følgende sats:

Teorem 16. Anta d<æ. Da gjelder: (Aa)(Ab)(0≤a≤b≤æ –>Q(d,a) Inkl Q(d,b))

Bevis: Ved induksjon. Anta 0≤a≤b≤æ. (i) Satsen holder trivielt om a=b.
(ii) Anta b=c+1. Da har man Q(d,b) = Q(d,c)UPt(Q(d,c)) og a≤c. Fra induksjonshypotesen følger Q(d,a) Inkl Q(d,c) Inkl Q(d,b). (iii) Anta bêK;II. Da har vi Q(d,b)= UN/c<b/(Q(d,c)). Er a=b holder selvfølgelig påstanden. Er a<b har man Q(d,a) Inkl UN/c<b/(Q(d,c)) = Q(d,b). **QED.**

Det er også lett å vise at man må ha:

Teorem 17. Anta d<æ. Da gjelder:
(Aa)(Ab)(0≤a<b<æ –> Q(d,a) Inkl Q(d,b))

Bevis: Anta 0≤a<b (i) b=c+1. Da har vi Q(d,b)= Q(d,c)UPt(Q(d,c)). Det følger også at man må ha a≤c. Ved hjelp av Teorem 16 og det faktum at Pt(x)»x om x er en mengde, kan man slutte:
Q(d,a) Inkl Q(d,c) SInkl Q(d,c)UPt(Q(d,c)) = Q(d,b)
(ii) Er bêK;II følger at a+1<b og man har i så fall:
Q(d,a) SInkl Q(d,a+1) = Q(d,a)UPt(Q(d,a)) Inkl UN/c<b/(Q(d,c)) = Q(d,b)
Dette holder fordi det er klart at man ikke kan ha Q(d,a)= Q(d,a)UPt(Q(d,a)) siden man i lys av Cantors sats har Pt(x)»x om x er en mengde. **QED.**

De teoremene som så langt har blitt utledet gjelder strukturen <Q(d,a)>/aêOn/ der d<æ. Intepretasjonene i familien <∂;a>/aêOn/ og ∂;æ har overhodet ikke blitt nevnt i Teorem 1 – Teorem 17. I den neste paragrafen vil det imidlertid bli bevist en rekke teoremer om disse intepretasjonene som senere vil bli anvendt i §11 hvor beviset for hovedteoremet, Teorem IV, vil bli gitt. Leseren må imidlertid vente til §11 før konturene av beviset for Teorem IV avtegner seg helt tydelig. La oss i mellomtiden beskjeftige oss med ∂;t og ∂;æ.

§10 Noen teoremer om intepretasjonene ∂;t og ∂;æ

Vi beviser først den følgende setning:

Teorem 18. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
xê(Q(d,æ) – Q(d,0) –> (∂;d(x=ø) <–> x=ø)
(b) xê(K+ – Q+) –> (∂;æ(x=ø) <–> x=ø)

Bevis: (a) Man har at formelen x=ø i L;e forkorter den følgende formel når den skrives i primitiv notasjon:
M(x) & (Ay)(yêx <–> y≠y)

Nå er denne formelen predikatlogisk ekvivalent med M(x) & (Ay)(¬(yêx)). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at ∂;d(M(x) & (Ay)(¬(yêx))) er ekvivalent med x=ø gitt xê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Nå har man:

(1) ∂;d(M(x) & (Ay)(¬(yêx))) = [xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Ay)(yêQ(d,æ) –> ¬(yêQ(d,æ) & yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0))))

Man ser lett at (1) holder i lys av definisjon 7.2 i §7

(I) Anta nå at (2) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) og at (3) ∂;d(M(x) & (Ay)(¬(yêx)))
Anta dessuten for reduktio ad absurdum at (4) zêx for noe z. Fra (2), (4) og Teorem 10 følger (5) zêQ(d,æ) som sammen med den annen halvdel i (1) samt (2) impliserer ¬(zêx). Dette gir oss en motsigelse. Man må altså ha (Az)(¬(zêx)), mao. at x=ø. (II) Anta nå (6) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) og dessuten at (7) x=ø. Vi ønsker da å vise at (3), det vil si høyre side i (1), holder. Den første komponenten i høyre side i (3) følger direkte fra (6). For å vise den andre konjunkten kan man anta for reduktio ad absurdum at det finnes noe y som er slik at:

(8) yêQ(d,æ) & yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0))

Da følger det helt trivielt at yêx og derfor i lys av (7) at yêø som er umulig. Dette viser at den andre konjunkten i ligningen (1) holder. Dermed er (a) bevist.

(b) Vi får et bevis for denne påstanden ved å erstatte "∂;d" overalt i beviset for (a) med "∂;æ" og ved å erstatte uttrykkene "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "K+" og "Q+". Utføres disse erstatningene holder beviset under (a) setning for setning. Referansen til definisjon 7.2 må imidlertid erstattes med en henvisning til definisjon 7.4 i §7. **QED.**

Teorem 19. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & yêQ(d,æ) –> (∂;d(x={y}) <–> x={y})
(b) xê(K+ – Q+) & yêQ(d,æ) –> (∂;æ(x={y}) <–> x={y})

Bevis: (a) Anta (1) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & yêQ(d,æ). Vi har per definisjon av ∂;d at:

(2) ∂;d(x={y}) = ∂;d(M(x) & (Ar)(rêx <–> r=y)) =
[xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
((rêQ(d,æ) & rêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) <–> (r,yêQ(d,æ) & r=y)))]

Formelen sist i denne ligningen er ekvivalent med:

(3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &(Ar)(rêQ(d,æ) –> (rêx <–> (yêQ(d,æ) &r=y)))

Det overlates til leseren å kontrollere riktigheten av denne siste påstanden.

(i) Anta (1) og (3) holder og at rêx for vilkårlig r. Fra rêx og (1) følger ved hjelp av Teorem 10 at rêQ(d,æ). Fra dette, (3) og rêx følger r=y, dvs. rê{y}. Siden r var et vilkårlig element i x viser dette at x Inkl {y}.

(ii) Anta på den annen side at rê{y} for vilkårlig r. Da har man r=y. Siden yêQ(d,æ) følger rêQ(d,æ). Dette og (3) impliserer rêx. Dermed har det blitt vist at {y} Inkl x og derfor i lys av resultatetunder (i) at x={y}.

(iii) Anta (1) holder og (4) x={y}. La rêQ(d,æ) for vilkårlig r. Er da rêx har man ved hjelp av (4) at r=y, og siden rêQ(d,æ) at r=y & yêQ(d,æ). Er på den annen side r=y & yêQ(d,æ) har man rê{y} og derfor rêx ved hjelp av (4).

Dette viser at (3) holder dersom (1) og (4) holder. Dette avslutter beviset for punkt (a).

Man får et bevis for (b) om man i beviset for punkt (a) erstatter "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". **QED.**

Teorem 20. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) –> (∂;d(x=Ur) <–> x=Q(d,0))
(b) xê(K+ – Q+) –> (∂;æ(x=Ur) <–> x=Q(d,0))

Bevis: (a) Man har at:
(1) ∂;d(x=Ur) = ∂;d(M(x) & (Ay)(yêx <–> ¬M(y))) =
[xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & (Ay)((yêQ(d.æ) –> ((yêQ(d,æ) & yêx &
xê(Q(d,æ) –Q(d,0))) <–> ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)))))]
Formelen sist til høyre i (1) er ekvivalent med:
(2) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ay)(yêQ(d,æ) –> (yêx <–> ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)))))
(A) Anta (2) og at forutsetningene i teoremet holder. Anta videre at yêx for vilkårlig y. Da følger yêQ(d,æ) ved hjelp av Teorem 10. Fra yêQ(d,æ) og (2) følger, siden yêx, at ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0))). Men da yêQ(d,0). Har man på den annen side at yêQ(d,0) har man ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0))). Dette og (2) impliserer yêx. Det følger at x=Q(d,0).
(B) Anta på den annen side at (3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & x=Q(d,0). Vi ønsker å vise at (2) holder. Anta for vilkårlig y at yêQ(d,æ). Er da yêx har man åpenbart yêQ(d,0) og derfor ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0))). Er y slik at ¬(yê(Q(d,æ) – Q(d,0))) følger yêQ(d,0) og derfor yêx i lys av (3). Dette viser at (2) holder. Dette avslutter beviset for (a).
(b) Også her er det slik at man kan bruke beviset under (a) for å vise punkt (b). Man behøver bare å erstatte "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" overalt med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". Dette skyldes at man ikke behøver å gjøre bruk av den indre struktur til Q(d,æ) og Q(d,0) bortsett fra dem som er gitt i og med Teorem 10 som da også gjelder for K+ og Q+. **QED.**

Teorem 21. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0) –> (∂;d(x Inkl y) <–> x Inkl y)
(b) x,yê(K+ – Q+) –> (∂;æ(x Inkl y) <–> x Inkl y)

Bevis: (a) Man har:
(1) ∂;d(x Inkl y) = ∂;d((Az)(zêx –> zêy)) = (Az)(zêQ(d,æ) –>
(zêQ(d,æ) & zêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –>
zêQ(d,æ) & zêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0))))
Den siste formelen i (1) er ekvivalent med:
(2) (Az)(zêQ(d,æ) & zêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –>. zêy & zê(Q(d,æ) – Q(d,0)))
(A) Anta (3) x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) og (2) holder. Anta for vilkårlig z at (4) zêx. Fra dette, (3) og Teorem 10 følger (5) zêQ(d,æ). Men fra (2) - (5) følger zêy. Man har altså at (6) x Inkl y.
(B) Anta (3) og dessuten at (6) holder. Vi ønsker å vise at (2) holder. Anta derfor zêQ(d,æ) & zêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) for vilkårlig z. Da følger ved hjelp av (3) og (6) at zêQ(d,æ) & zêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Dette avslutter beviset for (a). Når det gjelder punkt (b) i satsen får man et bevis for dette om man overalt erstatter "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". **QED.**

Korollar 21. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(M(x)& M(y)&x Inkl y) <–> x Inkl y)
(b) x,yê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(M(x) & M(y) & x Inkl y) <–> x Inkl y)

Bevis: Man benytter Teorem 21. **QED.**

Teorem 22. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0) & xêQ(d,æ) –> (∂;d(xêy) <–> xêy)
(b) x,yê(K+ – Q+) –> (∂;æ(xêy) <–> xêy)

Bevis: Dette følger direkte ved hjelp av definisjonene av ∂;d og ∂;æ. **QED.**

Teorem 23. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & y,zêQ(d,æ)–> (∂;d(x={y,z}) <–> x= {y,z})
(b) xê(K+ – Q+) & y,zêK+ –> (∂;æ(x = {y,z}) <–> x = {y,z})

Bevis: (a) Man har at:
(1) ∂;d(x={y,z}) = ∂;d(M(x) & (Ar)(rêx <–> (r=y v r=z))) =
xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
((rêQ(d,æ) & rêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) <–>
((r,yêQ(d,æ) & r=y) v (r,zêQ(d,æ) & r=z))))
Den siste formelen i (1) er under de forutsetningene som er angitt i teoremet ekvivalent med:
(2) xê(Q(d,æ) – Q(d.0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
(rêx <–> (y,zêQ(d,æ) & (r=y v r=z))))
(A) Anta (3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & y,zêQ(d,æ) og dessuten (2). Vi ønsker å vise at x={y,z}. Anta for vilkårlig r at rêx. Fra dette, (3) og Teorem 10 følger rêQ(d,æ). Fra dette, (3) og (2) følger i sin tur, siden rêx, at r=y v r=z. Man ser også lett at hvis (2) og (3) holder og r=y v r=z så har man rêx. Dette viser at x={y,z}.
(B) Anta (3) holder og at (4) x={y,z}. Vi ønsker da å vise at (2) holder. Er da rêQ(d,æ) & rêx følger umiddelbart y,zêQ(d,æ) & (r=y v r=z). Omvendt ser man lett at hvis rêQ(d,æ) & y,zêQ(d,æ) & (r=y v r=z) så er rê{y,z} og derfor rêx.
Dette avslutter beviset for (a). Beviset for punkt (b) blir helt analogt. **QED.**

Teorem 24. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & y,zêQ(d,æ)–> (∂;d(x=<y,z>) <–> x= <y,z>)
(b) xê(K+ – Q+) & y,zêK+ –> (∂;æ(x = <y,z>) <–> x = <y,z>)

Bevis: (a) Man har :
(1) ∂;d(x=<y,z>) = ∂;d(M(x) & (Ar)(rêx <–> (r={y} v r={y,z}))) =
[xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d((Ar)(rêx <–> (r={y} v r={y,z})))] <–>
[xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
(rêx <–> (∂;d(r={y}) v ∂;d(r= {y,z}))))]
Gitt forutsetningene i teoremet og benytter man Teorem 23 ser man at den siste formelen i (1) er ekvivalent med :
(2) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
(rêx <–> (rê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &(r={y} v r= {y,z}))))

Vi må nå vise at (2) under de forutsetningene som er angitt i teoremet er ekvivalent med x=<y,z>.

(i) Anta (2) og at (3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & y,zêQ(d,æ). Anta dessuten for vilkårlig r at (4) rêx. Fra (3), (4) og Teorem 10 følger (5) rêQ(d,æ). Fra (2),(4) og (5) følger r={y} v r={y,z}. Dette innebærer at rê{{y},{y,z}}=<y,z>. Siden r var vilkårlig har vi vist x Inkl <y,z>. Anta på den annen side for vilkårlig r at
(6) rê<y,z>. Da følger at (7) r={y} v r={y,z}. Fra (3), Teorem 15, samt (7) følger da at (8) rê(Q(d,æ) – Q(d,0)) og derfor (9) rêQ(d,æ). Fra (2), (7), (8) og (9) følger så rêx. Siden r var vilkårlig valgt har man derfor at <y,z> Inkl x.

(ii) Anta nå (10) x=<y,z> og (3) med det for øye å vise at (2) holder. Anta følgelig at for vilkårlig r at (11) rêQ(d,æ) & rêx. Da følger ved hjelp av (10) og (11) at (12) r={y} v r= {y,z}. Fra (3) har man at (13) y,zêQ(d,æ). Fra (13) og Teorem 15 følger {y}, {y,z}ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Dette og (12) gir en:
rê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Vi har dermed bevist den ene halvdelen av den andre konjunkten i (2). Anta nå for vilkårlig r at

(14) rê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (r={y} v r={y,z}) & rêQ(d,æ)

Da følger rê<y,z> og derfor fra (10) at rêx. Vi har nå vist at (10) ovenfor og (3) impliserer (2). Dette avslutter beviset for punkt (a).

Beviset for (b) blir helt analogt. Man erstatter bare "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+" overalt i beviset ovenfor. **QED.**

Teorem 25. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Rel(x)) <–> (Rel(x) & x Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ)))

(b) xê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Rel(x)) <–> (Rel(x) & x Inkl K+ X K+))

Bevis: (a) Man har at:

(1) ∂;d(Rel(x)) = ∂;d((Ay)(yêx –> (Ez)(Ew)(y=>z,w>))) <–>
(Ay)(yêQ(d,æ) –> ((yêQ(d,æ) & yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0))) –>
(Ez)(Ew)(z,wêQ(d,æ) & ∂;d(y=<z,w>)))) <–>
(Ay)(yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –>
(Ez)(Ew)(z,wêQ(d,æ) & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d(y=<z,w>)))

Den siste formelen til høyre i (1) er så i sin tur ekvivalent med:

(2) (Ay)(yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –> (Ez)(Ew)(z,wêQ(d,æ) & y=<z,w>))

Dette følger ved hjelp av Teorem 24.

(i) Anta at (3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) og dessuten at (2) holder. Anta for vilkårlig r at (4) rêx. (2), (3) og (4) impliserer da at

(Ez)(Ew)(z,wêQ(d,æ) & r=<z,w>) Dette innebærer at:
Rel(x) & x Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ). (ii) Anta (3) holder og at man har:

(5) Rel(x) & x Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ). Vi ønsker å vise at (2) holder. Anta derfor for vilkårlig y at (6) yêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Fra (6) og (5) følger :

(7) (Ez)(Ew)(y = <z,w>) og dessuten
(8) (Az)(Aw)(<z,w>êx –> zêQ(d,æ) & wêQ(d,æ))

Fra (6), (7) og (8) følger da: (Ez)(Ew)(z,wêQ(d,æ) & y=<z,w>). Dette viser at (2) holder. Dette avslutter beviset for (a). Beviset for punkt (b) blir helt analogt. Det kan gjennomføres setning for setning på den måten som er vist under (a) bortsett fra at man må erstatte "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" overalt med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". **QED.**

Teorem 26. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & y,zêQ(d,æ)–> (∂;d(<z,y>êx) <–> <z,y>êx)

(b) xê(K+ – Q+) & y,zêK+ –> (∂;æ(<z,y>êx) <–> <z,y>êx)

Bevis: (a) Vi har:

(1) ∂;d(<z,y>êx) = ∂;d((Ew)(M(w) & w=<z,y> & wêx) <–>

(Ew)(wêQ(d,æ) & wêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0))&

wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d(w=<z,y>))

I lys av Teorem 24 er den siste komponenten i (1) ekvivalent med :

(2) (Ew)(wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & w=<z,y> & wêx)

om vi går ut fra at forutsetningene i teoremet holder. Man ser imidlertid at (2) impliserer <z,y>êx. Er på den annen side (3) <z,y>êx har man:

(4) <z,y>ê(Q(d,æ) – Q(d,0))

i lys av Teorem 15 og forutsetningene z,yêQ(d,æ). Men fra (3) og (4) følger (2). Dette avslutter beviset for punkt (a).

(b) Dette punktet bevises på samme måte. Man erstatter bare uttrykkene "∂;d","Q(d,æ)" og "Q(d,0)" under beviset for punkt (a) med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". **QED.**

Teorem 27. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & yêQ(d,æ)–>

(∂;d((Ez)(<z,y>êx)) <–> (Ez)(zêQ(d,æ)&<z,y>êx))

(b) xê(K+ – Q+) & yêK+ –>

(∂;æ((Ez)(<z,y>êx)) <–> (Ez)(zêK+ &<z,y>êx))

Bevis: (a) Anta forutsetningene i teoremet holder. Man har da:

(1) ∂;d((Ez)(<z,y>êx)) = (Ez)(zêQ(d,æ) & ∂;d(<z,y>êx)). Men fra hypotesene i teoremet og Teorem 26 kan man da lett utlede at høyre side i (1) er ekvivalent med: (Ez)(zêQ(d,æ)&<z,y>êx). Dette viser at (a) holder. Punkt (b) bevises på en helt analog måte. **QED.**

Teorem 28. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) & zêQ(d,æ)–>

(∂;d((Ey)(<z,y>êx)) <–> (Ey)(yêQ(d,æ)&<z,y>êx))

(b) xê(K+ – Q+) & zêK+ –>

(∂;æ((Ey)(<z,y>êx)) <–> (Ey)(yêK+ &<z,y>êx))

Bevis: Beviset blir helt analogt med det som ble gitt for Teorem 27. **QED.**

Teorem 29. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

z,wê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>

(∂;d(Dom(z)=w) <–> Dom(Res(z,Q(d,æ)XQ(d,æ))=w)

(b) z,wê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Dom(z)=w) <–> Dom(Res(z,K+ X K+)=w)

Bevis: (a) Man har at:
(1) ∂;d(Dom(z)=w) = ∂;d(M(w) & (Ar)(rêDom(z) <–> rêw)) =
[wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
(∂;d(rêDom(z)) <–> ∂:d(rêw)))]
Man ser nokså lett i lys av teorem 27 at den siste formelen er ekvivalent med:
(2) wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ar)(rêQ(d,æ) –>
((Ey)(yêQ(d,æ) & <r,y>êz) <–> rêw))
Har man nå rêDom(Res(z, Q(d,æ)XQ(d,æ))) følger <r,y>êz & r,yêQ(d,æ) for noe y. Dette og (2) impliserer rêw. Er på den annen side rêw har man, siden wê(Q(d,æ) – Q(d.0)) at rêQ(d,æ). Ved hjelp av (2) følger da <r,y>êz der r,yêQ(d,æ) for noe y. Dette innebærer at rêDom(Res(z,Q(d,e)XQ(d,e))). Anta på den annen side (3) Dom(Res(z,Q(d,æ)XQ(d,æ))=w og at z,wê(Q(d,æ) – Q(d,0) med det for øye å bevise (2). Har man da rêw følger ved hjelp av (3) at (Ey)(<r,y>êz & yêQ(d,æ)). Det omvendte holder også som man lett ser. Dette viser at (a) holder. Punkt (b) i teoremet vises på nøyaktig samme måte. **QED.**

Teorem 30. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
z,wê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Rgn(z)=w) <–> Rgn(Res(z,Q(d,æ)XQ(d,æ))=w)
(b) z,wê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Rgn(z)=w) <–> Rgn(Res(z,K+ X K+)=w)

Bevis: Beviset for denne satsen er helt analogt med det for Teorem 29. **QED.**

Teorem 31. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
rê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Un(r)) <–> Un(Res(r, Q(d,æ)XQ(d,æ)))
(b) rê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Un(r)) <–> Un(Res(r,K+ X K+))

Bevis: (a) Man har per definisjon at:
(1) Un(r) <–> (Ax)(Ay)(Az)((<x,y>êr & <x,z>êr) –> y=z)
I lys av dette må man ha:
(2) ∂;d(Un(r)) = (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ(d,æ) &
∂;d(<x,y>êr) & ∂;d(<x,z>êr). –> (y,zêQ(d,æ) & y=z))
Men ved hjelp av tidligere teoremer har man om rê(Q(d,æ) – Q(d,0)) at:
(3) (x,yêQ(d,æ) & ∂;d(<x,y>êr)) <–> (x,yêQ(d,æ) & <x,y>êr)
(4) (x,zêQ(d,æ) & ∂;d(<x,z>êr)) <–> (x,zêQ(d,æ) & <x,z>êr)
Det følger derfor fra (2) - (4) samt hypotesene i teoremet at :
∂;d(Un(r)) <–> (Ax)(Ay)(Az)((x,y,zêQ(d,æ) &<x,y>êr & <x,y>êr) –> y=z)
<–> Un(Res(z,Q(d,æ)XQ(d,æ)))
Dette viser riktigheten av punkt (a). Når det gjelder punkt (b) bevises dette helt analogt. Man setter bare "∂;æ", "K+" og "Q+" inn i stedet for "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)". **QED.**

Teorem 32. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
rê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Un(r;-1)) <–> Un(Res(r;-1, Q(d,æ)XQ(d,æ)))
(b) rê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Un(r;-1)) <–> Un(Res(r;-1,K+ X K+))

Bevis: Beviset her er helt analogt med det for Teorem 31. **QED.**

Teorem 33. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
rê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Func(r)) <–> Func(r) & r Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ))
(b) rê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Func(r)) <–> Func(r) & r Inkl K+ X K+)

Bevis: Man benytter Teorem 25 og Teorem 31. **QED.**

Teorem 34. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
rê(Q(d,æ) – Q(d,0) –>
(∂;d(Cor(r)) <–> Cor(r) & r Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ))
(b) rê(K+ – Q+) –>
(∂;æ(Cor(r)) <–> Cor(r) & r Inkl K+ X K+)

Bevis: Man benytter Teorem 32 og Teorem 33. **QED.**

Teorem 35. (a) Anta d<æ. Da gjelder:
x,y,zê(Q(d,æ) – Q(d,0) –> (∂;d(x: y–(1-1,på)–>z) <–>
x: y–(1-1,på)–>z & x Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ))
(b) x,y,zê(K+ – Q+) –> (∂;æ(x: y–(1-1,på)–>z) <–>
x: y–(1-1,på)–>z & x Inkl K+ X K+)

Bevis: Teoremet følger fra Teorem 29, 30 og Teorem 34. **QED.**

Vi definerer mengden N på den følgende måte når vi arbeider med ZFC;u(L;e):

(10.1) N= SN(Mg(y: M(y) & øêy & (Ax)(xêy –> {x}êy)))

Arbeider vi med ZFC, dvs. bare tar i betraktning L og ikke trekker inn urindivider defineres N på den følgende måte:

(10.2) N = SN(Mg(y: øêy & (Ax)(xêy –> {x}êy)))
Man ser fra (10.1) og (10.2) at N er Zermelos versjon av de naturlige tall.

Det nest siste teoremet i denne paragrafen er den følgende sats:

Teorem 36. (a) Anta d<æ. Da gjelder:

xê(Q(d,æ) – Q(d,0) –> (∂;d(x=N) <–> x=N)
(b) xê(K+ – Q+) –> (∂;æ(x= N) <–> x= N)

Bevis: (a) Vi har at:

(1) ∂;d(x=N) = ∂;d((Az)(zêx <–>
(Ay)((M(y) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy))–> zêy)))

Formelen som betegnes av uttrykket til høyre i denne identiteten kaller vi a;0. Ved hjelp av definisjonen av ∂;d er det lett å vise at a;0 er den følgende formel:

(1.1) (Az)(zêQ(d,æ) –> (∂;d(zêx) <–>
(Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d(øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy)) –> ∂;d(zêy))))

Man kan nå vise under forutsetning av at xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) at (1.1) er ekvivalent med:

(2) (Az)(zêQ(d,æ) –> (zêx <–>
(Ay)((yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy)) –> zêy)))

Det vil være tilstrekkelig å vise at (2) impliserer x=N, og omvendt, forutsatt xê(Q(d,æ) – Q(d,0)).

(I) Vi viser først at (2) impliserer x=N gitt den nevnte forutsetning. Anta derfor at (2) holder og at (3) zêx for vilkårlig z. Siden (4) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) følger (5) zêQ(d,æ). Fra (2), (3) og (5) følger:

(6) (Ay)((yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy)) –> zêy)

Nå har vi (7) øêN & (Ar)(rêN –> {r}êN) Vi må imidlertid vise at:

(8) Nê(Q(d,æ) – Q(d,0)).

La oss imidlertid først vise at (9) ¬(NêQ(d,0)). Anta for reduktio ad absurdum at det motsatte av (9) holder. Da har man at N= <y,æ> for noe yêd<æ. Det følger at {y,æ} ê<y,æ>=N. Dette innebærer at {y,æ}êN. Nå har man (Ax)(xêN –> (x≠ø -> (Ey)(x={y}))). Siden {y,æ}≠ø følger da at {y,æ}={z} for noe z. Men da kan man slutte y=z=æ. Dette er imidlertid umulig siden y<d<æ. Dette viser at (9) holder. Nå har man (10) øêQ(d,w). Anta for vilkårlig r at rêQ(d,w). Da har vi siden wêK;II at rêQ(d,m). Det følger da at {r}êQ(d,m) og derfor:

{r}êPt(Q(d,m)) Inkl Q(d,m)UPt(Q(d,m))= Q(d,m+1) Inkl Q(d,w).

Dermed har vi vist: (11) (Ar)(rêQ(d,w) –> {r}êQ(d,w)) Fra (10), (11) og definisjonen av N følger ved induksjon at N Inkl Q(d,w). Men da har man:

(12) NêQ(d,w+1) Inkl Q(d,æ). Fra (12) og (9) følger så (8). Men fra (6), (7) og (8) følger zêN. Vi har nå bevist, siden z var et vilkårlig element, at (13) z Inkl N.

Anta på den annen side (14) zêN for vilkårlig z. Fra (14) og (8) har man at (15) zêQ(d,æ). Anta for vilkårlig y at:

(16) yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy)

Ved induksjon følger da (17) N Inkl y. Fra (14) og (17) følger zêy. Vi har dermed bevist, siden y var et helt vilkårlig valgt objekt, at:

(18) (Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy) –> zêy)

Fra (2), (15) og (18) følger zêx. Vi har dermed bevist, siden z var vilkårlig, at N Inkl x. Sammen med (13) gir dette en x=N.

(II) Anta igjen at forutsetningen i teoremet holder. Anta i tillegg at x=N. Vi må da vise at (2) holder. Dette er tilstrekkelig siden (2), som nevnt, var ekvivalent med ∂;d(x=N). (i) Anta for vilkårlig z at (19) zêQ(d,æ) & zêx. Da følger siden (20) x=N at (21) zêN Vi må da ha:

(22) (Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & øêy & (Ar)(rêy –> {r}êy) –> zêy)

(ii) Antar vi på den annen side at (22) holder for vilkårlig z og at zêQ(d,æ) følger det siden N oppfyller antesedenten i (22) at zêN=x. Dette avslutter beviset for punkt (a). Beviset for punkt (b) gjennomføres setning for setning på en helt tilsvarende måte. **QED.**

I beviset ovenfor ga vi et argument til fordel for (8). Vi oppfører her formel (8) som et eget teorem siden vi får bruk for dette senere.

Teorem 37. (a) Anta d<æ. Da gjelder: Nê(Q(d,æ) – Q(d,0)
(b) Nê(K+ – Q+)

Så langt har bare mer generelle egenskaper ved hierarkiet <Q(d,a)>/aêOn/ og intepretasjonene ∂;d og ∂;æ blitt studert. I de følgende paragrafer vil vi betrakte intepretasjonene av bestemte, konkrete formler i L;e. I første omgang skal vi undersøke intepretasjonene til aksiomene M1 – M12.

§11 Intepretasjonene av aksiomene i ZFC;u(L;e).

La P være en av formlene M1 – M12 i §1. I dette avsnittet vil vi vise at ∂;d(P) der d<æ, såvel som ∂;æ(P) er teoremer i ZFC + I. (Det minnes om at I er det aksiomet som sier at det finnes utilgjengelige kardinaltall.) I neste avsnitt vil vi se på ∂;d(P) og ∂;æ(P) når P tenkes å være et av de urmengde-aksiomene som ble presentert i §4.

§11.1 Mengdeaksiomet i L;e, M1

Man har at M1 er den følgende formel i L;e, nemlig:
(Ax)(Ay)(xêy –> M(y))

Teorem 38. (a) Er d<æ gjelder ∂;d(M1). (b) ∂;æ(M1)

Bevis: (a) Man har at:
(1) ∂;d(M1) =
(Ax)(Ay)(x,yêQ(d,æ) –> ((xêQ(d,æ) & xêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)))
Nå ser man umiddelbart at ∂;d(M1) er et rent predikatlogisk teorem i L. Det er da selvfølgelig også et teorem i ZFC + I. Dette viser riktigheten av (a).
(b) Denne delen av satsen bevises på akkurat samme måten. **QED.**

§11.2 Urmengdeaksiomet i L;e, M2

Urmengdeaksiomet i L;e, M2, er den følgende formel:
M2 (Ey)(M(y) & (Ax)(xêy <–> ¬M(x)))

Teorem 39. (a) ∂;d(M2) (d<æ) (b) ∂;æ(¬M2)

Bevis: (a) Innføres definisjonen Ur = Mg(x: ¬M(x)) ser man at M2 kan skrives slik: (Ey)(y=Ur). Man har da:
(1) ∂;d(M2) = (Ey)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d(y=Ur)) <–>
(Ey)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & y=Q(d,0)) <–> Q(d,0)ê(Q(d,æ) – Q(d,0))
Dette følger ved hjelp av Teorem 20. Det er derfor tilstrekkelig å bevise
(2) Q(d,0)ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Siden Q(d,0) åpenbart eksisterer kan man ikke ha Q(d,0)êQ(d,0) i lys av Fundierungsaksiomet. Det følger derfor at
(3) ¬(Q(d,0)êQ(d,0)). Nå har man:

Q(d,0)êQ(d,0)UPt(Q(d,0)) = Q(d,1) Inkl UN/b<æ/(Q(d,b)) = Q(d,æ)
Det følger at Q(d,0)êQ(d,æ). Dette og (3) gir en (2).

(b) Man har at ∂;æ(¬M2)) = ∂;æ(¬(Ey)(y=Ur)) =
¬(Ey)(yê(K+ – Q+) & y=Q+)

("K+" og "Q+" ble definert i §7. Man kan konsultere definisjon 7.3). Anta mot formodning at (+) (Ey)(yê(K+ – Q+) & y=Q+). Da har man yê(K+ – Q+) & y=Q+ for noe y. Herav følger Q+ êK+. Fra definisjonene av Q+ og K+ har man:

(2) UN/d<æ/(Q(d,0))ê(UN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a)))).

Det følger herav at det finnes d;1, a;1 der (3) d;1,a;1<æ og hvor:

(4) UN/d<æ/(Q(d,æ))êQ(d;1,a;1). Nå har man at:

(5) UN/d<æ/(Q(d,0)) = UN/d<æ/(Mg(<x,æ>:xêd)) = Mg(<x,æ>:xêæ)= Q(æ,0)

Det følger herav at (6) Q(æ,0)≈ æ. (Funksjonen Mg(<x,<x,æ>>: xêæ) avbilder æ en-entydig på Q(æ,0)) Nå har man Q+ ê(K+ – Q+). Fra dette, (4) og Teorem 9 følger: (7) Q+ = UN/a<æ/(Q(a,0)) Inkl Q(d;1,a;1) for noe a;1<æ. Men fra (5), (6) og (7) følger æ ≈ Q+ Inkl Q(d;1,a;1) der d;1,a;1<æ. Det følger at man i så fall må ha : Cd(Q(d;1,a;1))≥æ. Men dette strider mot Teorem 5. Dette viser at (+) er usann og avslutter dermed beviset for punkt (b). **QED.**

Man ser fra Teorem 39 at i forbindelse med M2 avviker de diverse intepretasjonene ∂;d (d<æ) og ∂;æ. Sammen med de kommende resultater kan Teorem 39 brukes til å vise at M2 er uavhengig av ZFC;u–(L;e) forutsatt at ZFC+I er konsistent.

§11.3 Ekstensjonalitetsaksiomet i L;e, M3

M3 er den følgende formel i L;e:

(Ax)(Ay)((M(x) & M(y) & (Ez)(zêx) &(Ez)(zêy) &
(Az)(zêx <–> zêy)) –> x=y)

Teorem 40. (a) ∂;d(M3) (d<æ) (b) ∂;æ(M3)

Bevis. (a) Man har at ∂;d(M3) er den følgende formel:

(1) (Ax)(Ay)(x,yêQ(d,æ) –>
[((Ew)(wêQ(d,æ) & wêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0))) &
(Ew)(wêQ(d,æ) & wêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0))) &
(Aw)(wêQ(d,æ) –>
wêQ(d,æ) & wêx & xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) <–>
wêQ(d,æ) & wêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)))] –>
x,yêQ(d,æ) & x=y

Benytter man seg av Teorem 10 ser man at ∂;d(M3) er ekvivalent med:

(2) (Ax)(Ay)([x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Ew)(wêQ(d,æ) & wêx) & (Ew)(wêQ(d,æ) & wêy) &
(Aw)(wêQ(d,æ) –>(wêx <–> wêy))] –> x=y

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise at (2) holder. Anta derfor for vilkårlige x,y at (3)
x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Ew)(wêQ(d,æ) & wêx) & (Ew)(wêQ(d,æ) & wêy) &
(Aw)(wêQ(d,æ) –>(wêx <–> wêy))]

og at z er et vilkårlig element der (4) zêx. Fra (4), den første konjunkten i (3) samt Teorem 10 følger (5) zêQ(d,æ). Fra (5) og den siste konjunkten i (3) følger zêy siden (4) holder. Det følger at x Inkl y. At y Inkl x vises på en helt analog måte.

(b) Man får et bevis for punkt (b) ved overalt i punkt (a) å erstatte "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+". **QED.**

§11.4 Nullmengdeaksiomet i L;e, M4

Nulmengdeaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M4 (Ey)((M(y) & ¬(Ez)(zêy) & (Aw)(M(w) &¬(Ez)(zêw))) –> w=y)

Man har nå:

Teorem 41. (a) ∂;d(M4) (d<æ) (b) ∂;æ(M4)

Bevis: (a) Man har at M4 er predikatlogisk ekvivalent med den følgende formel:

(Ey)((M(y) & y=ø & (Aw)((M(w) &y=ø)) –> w=y)

I lys av Teorem 18 har man derfor at ∂;d(M4) er ekvivalent med:

(Ey)(yê(Q(d,e) – Q(d,0) & y=ø & (Aw)(wê(Q(d,e) – Q(d,0) & w=ø –> w=y)

Dette er imidlertid ekvivalent med: (+) øê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Siden vi i lys av Teorem 1 har øêPt(Q(d,0)) Inkl Q(d,æ) og ¬(øêQ(d,0)) følger det at (+) holder.

(b) Beviset for punkt (b) bli helt analogt. **QED.**

§11.5 Utsondringsaksiomet i L;e, M5

Utsondringsaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M5 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (zêy & B))))

Man forutsetter i denne forbindelse at variablene x og y ikke forekommer fri i B. Man har nå:

Teorem 42. (a) ∂;d(M5) (d<æ) (b) ∂;æ(M5)

Bevis: (a) Man har at

(1) ∂;d(M5) = (Ax)(xêQ(d,æ) &xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –>
(Ey)(yêQ(d,æ) & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Ar)(rêQ(d,æ) –>(rêQ(d,æ)&rêy &yê(Q(d,æ) – Q(d,0))) <–>
(rêQ(d,æ)&rêx &xê(Q(d,æ) & ∂;d(B))))))

Denne formlen kan man lette vise er predikatlogisk ekvivalent med:

(2) (Ax)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –> (Ey)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Ar)(rêQ(d,æ) –> (rêy <–> (rêx & ∂;d(B))))))

Det er derfor tilstrekkelig å vise at (2) holder. Anta derfor (3) xê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Da har man (4) xêQ(d,a) for noe a<æ. Ved hjelp av Teorem 9 følger da
(5) x Inkl Q(d,b) for b<a<æ. Sett nå per definisjon (6) y;0=Mg(r:rêx & ∂;d(B)). Da har man (7) y;0 Inkl x Inkl Q(d,b) og derfor:

y;0êPt(Q(d,b)) Inkl Q(d,b+1) Inkl Q(d,æ)

Det følger at (8) y;0êQ(d,æ). Tilfelle (i): y;0=ø. I så tilfelle har man åpenbart at ¬(y;0êQ(d,0)). Tilfelle (ii): (9) zêy;0 for noe z. Men y;0êPt(Q(d,b)) og man har at Pt(Q(d,b))ΩQ(d,0)=ø. Det følger at ¬(y;0êQ(d,0)). I alle tilfelle har man følgelig ¬(y;0êQ(d,0)). Dette og (8) gir en: (10) y;0ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Anta rêQ(d,æ) for vilkårlig

r. Er rêy;0 har man åpenbart i lys av (6) at rêx & ∂;d(B). Har man på den annen side rêx & ∂;d(B) følger også tydeligvis rêy;0. Man har derfor:

(11) (Ar)(rêQ(d,æ) –> (rêy;0 <–> (rêx & ∂;d(B))))

Fra (3) følger (10) og (11). Dette viser at (2) holder. Dette avslutter beviset for (a). Punkt (b) i teoremet bevises på en helt tilsvarende måte. **QED.**

§11.6 Parmengdeaksiomet i L;e, M6

Parmengdeaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M6 (Ay)(Az)(Ex)(M(x) &(Aw)(wêx <–> (w=y v w=z)))

Man har:

Teorem 43. (a) ∂;d(M6) (d<æ) (b) ∂;æ(M6)

Bevis: (a) M6 er logisk ekvivalent med :

(1) (Ay)(Az)(Ex)(M(x) & x= {y,z})

Man har derfor at:

(2) ∂;d(M6) <–>
(Ay)(Az)(y,zêQ(d,æ) –> (Ex)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & ∂;d(x={y,z})))

I lys av Teorem 23 er den høyre komponenten i denne bikondisjonalen ekvivalent med:

(3) (Ay)(Az)(y,zêQ(d,æ) –> (Ex)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & x={y,z}))

Men (3) er ekvivalent med: (4) (Ay)(Az)(y,zêêQ(d,æ) –>{y,z}ê(Q(d,æ) – Q(d,0))).
Dette siste følger direkte fra Teorem 15. (b) Dette punktet bevises på en helt tilsvarende måte. **QED.**

§11.7 Foreningsmengdeaksiomet i L;e, M7

Foreningsmengdeaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M7 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) &(Az)(zêx <–> (Ew)(zêw & wêy))))

Man har:

Teorem 44. (a) ∂;d(M7) (d<æ) (b) ∂;æ(M7)

Bevis: (a) Man har at ∂;d(M7) er ekvivalent med:

(1) (Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –> (Ex)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Az)(zêQ(d,æ) –>(zêx <–> (Ez)(zêw &wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
wêy & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)))))))

Denne formelen er så i sin tur ekvivalent med:

(2) (Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –> (Ex)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
(Az)(zêQ(d,æ) –> (zêx <–> (Ez)(zêw & wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & wêy)))))

Det er derfor tilstrekkelig å gi et bevis for (2). Anta (3) yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) for vilkårlig y. Definer z;0 ved (4) z;0= UN(y–Q(d,0)). Man kan nå vise:

(5) z;0ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Man har fra (3) at:

(6) yêQ(d,æ)= UN/a<æ/(Q(d,a))

Det følger videre fra (3), (6) og Teorem 9 at (7) y Inkl Q(d,b) der b+1=c<æ. Fra (7) følger: (8) (y–Q(d,0)) Inkl y Inkl Q(d,b). Anta for vilkårlig x at xêUN(y–Q(d,0)). Da har man xêwê(y–Q(d,0)) for noe w. Da wêy Inkl Q(d,b) i lys av (8). Det følger også at ¬(wêQ(d,0)). Siden wê(Q(d,æ) – Q(d,0)) følger w Inkl Q(d,c;1) for noe c;1 der c;1<b<æ. Man kan herav slutte at xêQ(d,c;1). Men siden c;1<b har man Q(d,c;1) Inkl Q(d,b) og derfor xêQ(d,b). Vi

har nå vist at UN(y–Q(d,0)) Inkl Q(d,b). Da UN(y–Q(d,0))êPt(Q(d,b)) Inkl Q(d,b+1) Inkl Q(d,æ). Siden UN(y-Q(d,0)êPt(Q(d,b)) har man ved hjelp av Teorem 8 at ¬(UN(y-Q(d,0))êQ(d,0)). Det følger at (5) ovenfor holder.

Man må imidlertid også bevise at:

(9) (Az)(zê(Q(d,æ) –> (zêUN(y–Q(d,0)) <–>
(Ex)(zêx & xê(Q(d,æ)–Q(d,0)) &xêy)

Anta (10) zêQ(d,æ) & zêUN(y–Q(d,0)) for vilkårlig z. Da har man

zêw & wê(y–Q(d,0)) for noe w. Det følger at (Ew)(zêw & wê(Q(d,æ)–Q(d,0)) &wêy). Har man på den annen side at zêQ(d,æ)&zêw & wê(Q(d,æ)–Q(d,0)) &wêy har man åpenbart at wê(y-Q(d,0)) og derfor zêUN(y–Q(d,0)). Dette viser at (9) holder og avslutter dermed beviset for (a).

(b) Erstatter man i beviset for punkt (a) "∂;d", "Q(d,æ)" og "Q(d,0)" med henholdsvis "∂;æ", "K+" og "Q+" for man et bevis for punkt (b). **QED.**

§11.8 Potensmengdeaksiomet i L;e, M8

Potensmengdeaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M8 (Ay)(M(y) –> (Ex)(M(x) & (Az)(zêx <–> (M(z) & (Aw)(wêz –>wêy)))))

Man har:

Teorem 45. (a) ∂;d(M8) (d<æ) (b) ∂;æ(M8)

Bevis: (a) Vi har at ∂;d(M8) er ekvivalent med den følgende formel:

(1) (Ay)(yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) –>(Ex)(xê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Az)(zêx <–> (zê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Aw)((wêQ(d,æ) & wêz) –> wêy)))))

(For å bevise dette må man benytte Teorem 10) Det er derfor tilstrekkelig å vise at (1) holder. Anta derfor for vilkårlig y at (2) yê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Sett:

(3) x;0=Pt(y). Fra (2) følger (4) yêQ(d,a) for noe a<æ. Da yê(Q(d,a)–Q(d,0)). Dette og Teorem 9 impliserer at (5) y Inkl Q(d,c) for noe c der c<a<æ. Fra (5) følger

Pt(y) Inkl Pt(Q(d,c)) Inkl Q(d,c)UPt(Q(d,c)) = Q(d,c+1)

Det følger at Pt(y) êPt(Q(d,c+1)). Dette og Teorem 8 impliserer at ¬(Pt(y)êQ(d,0)). Men siden Pt(y)êPt(Q(d,c+1) Inkl Q(d,c+2) har man (6) Pt(y)ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Dette innebærer at (7) x;0ê(Q(d,æ) – Q(d,0)).

(i) Anta for vilkårlig z at (8) zêx;0. Da har man zêPt(y) og derfor at z Inkl y. I lys av (5) følger i så fall: z Inkl Q(d,c) og derfor zêQ(d,c+1) Inkl Q(d,æ). Siden z Inkl Q(d,c) har man zêPt(Q(d,c)) og derfor at ¬(zêQ(d,0)) ved hjelp av Teorem 8. Det følger at (9) zê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Har man for vilkårlig w at wêQ(d,æ) & wêz må man åpenbart ha wêy siden z Inkl y. (ii) Er på den annen side z et vilkårlig objekt som oppfyller følgende krav:

(10) zê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Aw)(wêQ(d,æ) & wêz –>wêy)

har man at z Inkl Q(d,c) for noe c<æ. Derfor har man om wêz at zêQ(d,c) Inkl Q(d,æ). Ved hjelp av (10) følger da wêy. Det følger at z Inkl y og derfor at

zêPt(y)=x;0. Dette avslutter beviset for punkt (a). (b) Beviset føres på en helt tilsvarende måte. **QED.**

§11.9 Uendelighetsaksiomet i L;e, M9

Uendelighetsaksiomet er den følgende formel, nemlig:

M9 (Ex)(M(x) & (Ay)((M(y) &¬(Ex)(xêy)) –> yêx) &

(Az)((zêx &M(z)) –> (Ew)(M(w) &wêx & (Ar)(rêw <–> r=z))))

Nå ser man nokså lett at denne formelen er ekvivalent med

(+) (Ex)(Ey)(M(x)& M(y) & y=N & y Inkl x)

Vi skal derfor vise at intepretasjonene av (+) holder. Man har:

Teorem 46. (a) ∂;d(M9) (d<æ) (b) ∂;æ(M9)

Bevis: (a) Man har at ∂;d(+) er ekvivalent med:

(1) (Ex)(Ey)(xê(Q(d,æ)–Q(d,0)) & yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
∂;d(y=N) & ∂;d(y Inkl x))

Ved hjelp av Teorem 21 og Teorem 36 ser man at (1) er ekvivalent med:

(2) (Ex)(Ey)(x,yê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & y Inkl x & y=N)

Fra Teorem 37 kan man slutte Nê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Men dette impliserer (2).
(b) Beviset for dette punktet blir helt analogt. **QED.**

§11.10 Substitusjonsaksiomet i L;e, M10

Substitusjonsaksiomet er den følgende formel:

M10 ((Ax)(Ay)(Az)(B(x,y) &B(x,z) –> y=z) &M(w)) –>
(Ew')(M(w') & (Ax)(xêw' <–> (Ey)(yêw & B(x,y))))

Nå ser man nokså lett at denne formelen er ekvivalent med
Man har:

Teorem 47. (a) ∂;d(M10) (d<æ) (b) ∂;æ(M10)

Bevis: (a) Man har at ∂;d(M10), når den skrives ut, blir den følgende formel:

(1) [(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ(d,æ) & ∂;d(B(x,y)) & ∂;d(B(x,z)) –> y=z) &
wê(Q(d,æ)–Q(d,0))] –>
(Ew')(w'ê(Q(d,æ) – Q(d,0)) & (Ax)(xêQ(d,æ) –>
(xêw' <–> (Ey)(yêQ(d,æ) & yêw & ∂;d(B(y,x))))))

Anta (2) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêQ(d,æ) & ∂;d(B(x,y)) & ∂;d(B(x,z)) –> y=z) og
(3) wê(Q(d,æ)–Q(d,0)). Sett per definisjon
f= Mg(<x,y>: x,yêQ(d,æ) & ∂;d(B(x,y)))

Sett videre: (4) w;0=f ‘‘w. Vi vil først vise at (5) w;0ê(Q(d,æ) – Q(d,0)). Fra (2) følger (6) Func(f). Fra (3) følger (7) wêQ(d,b) der b<æ. Siden ¬(wêQ(d,0)) følger ved hjelp av Teorem 9 at (8) w Inkl Q(d,b;0) der b;0 <b<æ. Fra (8) følger:

(9) Cd(w) ≤ Cd(Q(d,b;0)) <æ. Det finnes derfor q slik at (10) q<æ & q≈w. Anta for reduktio ad absurdum at (11) ¬(f ‘‘wêQ(d,æ)). Nå kan man ikke ha:
(12) f‘‘wêQ(d,0). For vi har fra definisjonen av f at f Inkl Q(d,æ)XQ(d,æ). Dette innebærer at (13) f‘‘w Inkl Q(d,æ). For anta mot formodning at (12) er riktig. Da har vi (14) f‘‘w =<x,æ> for noe x<d. Det følger at {x,æ}êf‘‘w. Fra dette og (13) har vi så {x,æ}êQ(d,c) for noe c<æ. Nå har man imidlertid ¬({x,æ}êQ(d,0)). For i motsatt fall ville man ha {x,æ} =<y,æ> for noe y<d. Da følger {x,æ}={{y},{y,æ}} og i så fall har man {y,æ}ê{x,æ} som impliserer at æêx eller at æêæ. Begge deler er umulig. Det følger at {x,æ}ê(Q(d,c) – Q(d,0)). Men herav følger ved hjelp av et tidligere teorem at æêQ(d,c;2) for noe c;2<c<æ. Men det er umulig. Fra dette slutter vi at (12) er gal og at man har (15) ¬(f‘‘wêQ(d,0)). Definer k(x) ved:

(++) k(x) = μb(f(x)êQ(d,b) & b<æ)

Anta nå for vilkårlig c;0 at (16) c;0<æ og anta (17) (Ax)(xêw –> k(x)<c;0). Fra (17) følger siden f(x)êQ(d,k(x)) & Q(d,k(x)) Inkl Q(d,c;0) om xêw at:

(18) (Ax)(xêw –> f(x)êQ(d,c;0)). Dette innebærer (19) f‘‘w Inkl Q(d,c;0). Da har man: f‘‘wêPt(Q(d,c;0)) Inkl Q(d,c;0+1) Inkl Q(d,æ). Men dette strider mot (11). Vi har derfor: (20) (Ac)(c<æ –>(Ex)(xêw & k(x)≥c)). Men fra dette og (10) følger at æ er cofinal med q. Men siden æ er et utilgjengelig kardinaltall er dette umulig. Det følger derfor at (11) er usann. Dette og (15) impliserer at

(21) w;0=f‘‘wê(Q(d,æ) – Q(d,0))

Anta nå for vilkårlig x at (22) xêQ(d,æ). Har man da xêw;0 følger ved hjelp av definisjonen av f at det finnes y der yêw & ∂;d(B(x,y)). I lys av (3) og Teorem 10 har man da yêQ(d,æ). Har man på den annen side yêQ(d,æ) & yêw & ∂;d(B(x,y)) følger xêf‘‘w=w;0. Det avslutter beviset for punkt (a).

(b) I forbindelse med dette teoremet blir ikke beviset for punkt (b) helt analogt med beviset for punkt (a) slik som ved de fleste av de teoremer som vi tidligere har bevist. Vi vil derfor gjennomføre beviset separat.

Man har at ∂;æ(M10) er ekvivalent med den følgende formel:

(1) [(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK+ & ∂;æ(B(x,y)) & ∂;æ(B(x,z)) –> y=z) &
wê(K+ – Q+)] –>
(Ew')(w'ê(K+ – Q+) & (Ax)(xêK+ –>
(xêw' <–> (Ey)(yêK+ & yêw & ∂;æ(B(y,x))))))

Anta (2) (Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêK+ & ∂;æ(B(x,y)) & ∂;æ(B(x,z)) –> y=z) og dessuten at (3) wê(K+ – Q+). Sett per definisjon:

f= Mg(<x,y>: x,yêK+ & ∂;æ(B(x,y)))

Definer videre w;0 ved w;0= f‘‘w. Det første vi ønsker å vise er:

(5) w;0ê(K+ – Q+).

Fra (3) følger wêUN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a))). Dette innebærer at det finnes d;1,a;1 der man har (6) d;1,a;1<æ & wêQ(d;1,a;1). Siden ¬(wêQ+) har man ved hjelp av Teorem 9 at det finnes b;0 der (7) b;0<a;1<æ & w Inkl Q(d;1,b;0). Det må derfor finnes et ordinaltall q slik at (8) q≈w & q<æ siden det følger fra (7) at
Cd(w) ≤ Cd(Q(d,1,b;0)) <æ. Man kan nå lett vise: (9) ¬(w;0êQ+). For anta for reduktio ad absurdum at w;0êQ+ = UN/d<æ/(Q(d,0)). Da har man:

(10) w;0êQ(d;1,0) for noe d;1<æ. Nå har vi imidlertid at f Inkl K+XK+ og derfor at f‘‘w Inkl K+. Det følger at (11) w;0 = f‘‘w Inkl Q(d;2,a;2) for noen ordinaltall d;2 og a;2 der d;2,a;2<æ. Fra (10) følger w;0=<x,æ> for noe xêd;1. Det følger at {x,æ}êw;0 Inkl Q(d;2,a;2). Da kan man ikke ha {x,æ}êQ(d;2,0) for i så tilfelle ville {x,æ}=<y,æ> for noe yêd;2. Men da {y,æ}ê{x,æ} for x,y med i henholdsvis d;1 og d;2. Dette leder til en motsigelse på samme måte som vist under (a). Det følger at {x,æ}ê(Q(d;2,a;2) – Q(d;2,0)). Men da har man æêQ(d;2,c) for noe c≤a;2<æ. Men dette er umulig. Derfor holder (9).

Vi må bevise at w;0=f‘‘wêK+. Anta for reduktio ad absurdum at ¬(w;0êK+). (Fra nå av adskiller beviset seg fra det som er gitt under punkt (a)). Vi har, som nevnt ovenfor, at (12) f‘‘w Inkl K+. Dette innebærer at

(13) (Ax)(xêw –> f(x)êUN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a))). Vi har derfor følgende:

(14) (Ax)(xêw –> Mg(<d,a>: d,a<æ & f(x)êQ(d,a)) ≠ø)

Definer nå h(x) ved : (15) h(x) = Mg(<d,a>: d,a<æ & f(x)êQ(d,a)). Fra (14) og (15) følger : (16) (Ax)(xêw –> h(x)≠ø). Ved hjelp av utvalgsaksiomet kan man da slutte at det finnes ¥ der :

(17) Func(¥) & Dom(¥)=w & (Ax)(xêw –> ¥(x)êh(x)). Vi definerer nå, om xêw, g(x) ved (18) g(x) = Max(¥(x)). Fra (14) – (18) fremgår det at:

(Ax)(xêw –> g(x) <æ). Anta for vilkårlig c;0 at (19) c;0<æ og at

(20) (Ax)(xêw –> g(x)<c;0). Fra (20) og (18) følger:
(21) (Ax)(xêw –> Max(¥(x)) <c;0)
Fra dette og (14) - (17) følger:
(22) (Ax)(xêw –> (Ed)(Ea)(d,a <æ & f(x)êQ(d,a) & d,a<c;0))
Men Q(d,a) Inkl Q(c;0,c;0) om d,a<æ. (Jmf. Teorem 14 og Teorem 16). Det følger derfor at (Ax)(xêw –> f(x)êQ(c;0,c;0)). Men da f‘‘w Inkl Q(c;0,c;0) og dermed
f‘‘wêPt(Q(c;0,c;0)) Inkl Q(c;0,c;0+1) Inkl K+
Men dette strider mot antagelsen om at f‘‘w=w;0 ikke er med i K+, ie. mot ¬(w;0êK+). Det følger derfor at:
(23) (Ad)(d<æ –> (Ex)(xêw & g(x) ≥d)
Fra dette forhold og Teorem 10.56 i Takeuti [1] utleder vi i lys av (8) at æ er cofinal med et ordinaltall ≤q. Men dette strider mot at æ er et regulært ordinaltall. Vi har derfor at (24) w;0êK+. Sammen med (9) gir dette (25) w;0ê(K+ – Q+). Anta nå for vilkårlig x at xêK+ & xêw;0. Da har vi xêf‘‘w og derfor at det finnes y der
yêw & ∂;æ(B(y,x)). Men wê(K+ – Q+). Da yêK+ (Jmf. Teorem 10). Har man på den annen side at xêK+ & (Ey)(yêK+ & yêw & ∂;æ(B(y,x)) for vilkårlig x ser man lett at xêf‘‘w=w;0. Vi har dermed vist at konsekventen i (1) holder om antesedenten gjør det. Dette avslutter beviset for Teorem 47. **QED.**

§11.11 Fundierungsaksiomet i L;e, M11

Fundierungsaksiomet er den følgende formel:

M11 (M(x) & (Ew)(wêx)) –>(Ey)(yêx & ¬(Ez)(zêy & zêx))

Man har:

Teorem 48. (a) ∂;d(M11) (d<æ) (b) ∂;æ(M11)

Bevis: Vi beviser her bare punkt (b) og overlater punkt (a) til leseren.
(b) Man viser lett at ∂;æ(M11) er ekvivalent med den følgende formel:
(1) xê(K+ – Q+) & (Ew)(wêK+ &wêx) –>
(Ey)(yêK+ &yêx & ¬(Ez)(zêK+ & zêy & yê(K+ – Q+) & zêx))
Det er tilstrekkelig å bevise at (1) holder. Anta derfor for vilkårlig x at (2) xê(K+ – Q+) og anta at det finnes w der (3) wêK+ & wêx. Fra (2) følger xêUN/d<æ/(UN/a<æ/(Q(d,a))). Dette innebærer at det finnes d,a der
(3.1) xêQ(d,a) & d,a<æ. Definer g;d ved:
(4) g;d = Mg(<y,µb(b<æ & yêQ(d,b))>: yêx)
Ved hjelp av denne definisjonen viser man lett
(5) Func(g;d) & Rgn(g;d) = g;d‘‘x.
Man ser dessuten at (6) ø≠g;d‘‘x Inkl On (Jmf. (3)). Vi definerer :
(7) c= µa(aêg;d‘‘x) Fra (7) følger cêg;d‘‘x og derfor at det finnes y;0êx slik at c=g;d(y;0). Vi velger ut en slik y;0 dvs. at (8) y;0êx og g;d(y;0)=c. Fra (2) følger ¬(xêQ(d,0)). Fra dette, (3) samt Teorem 9 følger (9) x Inkl Q(d,a;2) der (10) a;2 < a <æ. Fra (8) og (9) y;0êQ(d,a;2) Inkl K+. Vi har derfor:
(11) y;0êK+ & y;0êx. Anta nå for reduktio ad absurdum at det finnes z der:
(12) zêK+ & zêy;0 & y;0ê(K+ – Q+) & zêx.
Siden zêx følger fra (4) at (13) g;d(z) ≥c. Nå har man g;d(y;0) = c = µb(y;0êQ(d,b) & b<æ) Fra dette følger y;0êQ(d,c). Fra (12) følger ¬(y;0êQ+) og derfor ¬(y;0êQ(d,0)). Derfor

y;0ê(Q(d,c) – Q(d,0)). Da har man y;0 Inkl Q(d,c;2) der c;2<c<æ. Siden zêy;0 ifølge (12) har man da at zêQ(d,c;2). Men da må vi i lys av (4) og det at zêx ha at g;d(z) ≤c;2 <c. Men dette strider mot (13). Dette avslutter beviset for
Teorem 48. **QED.**

§11.12 Utvalgsaksiomet i L;e, M12

Fundierungsaksiomet er den følgende formel:

M12 [M(x) & (Ay)(yêx –> (M(y) & (Ez)(zêy))) &
(Az)(Ay)(y,zêx & y≠z –> ¬(Ew)(wêy &wêz))] –>
(Ez)(M(z) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêy &rêz) &(At)((têy &têz) –> t=r))))

Man har:

Teorem 49. (a) ∂;d(M12) (d<æ) (b) ∂;æ(M12)

Bevis: Som ved Teorem 48 vil vi her bare gi bevis for punkt (b). Beviset for punkt (a) vil i det vesentlige følge det samme mønster. Vi overlater derfor beviset for (a) til leseren.

(b) Man har at ∂;æ(M12) er ekvivalent med den følgende formel:

(1) xê(K+ – Q+) & (Ay)(yêx –> (yê(K+ – Q+) & (Ez)(zêy)) &
(Ay)(Az)((y,zêx & y≠z) –> ¬(Ew)(wêK+ & wêy & wêz)) –>
(Ez)(zê(K+ – Q+) & (Ay)(yêx –> (Er)(rêK+ & rêy & rêz &
(At)(têK+ &têy & têz –> t,rêK+ &t=r))))

Det vil derfor være tilstrekkelig å gi bevis for (1). Anta derfor at antesedenten i (1) holder med det for øye å vise eksistensen av en passende z som har de egenskaper som er angitt i konsekventen i (1). Mao. anta at:

(2) xê(K+ – Q+)
(3) (Ay)(yêx –> (yê(K+ – Q+) & (Ez)(zêy))
(4) (Ay)(Az)((y,zêx & y≠z) –> ¬(Ew)(wêK+ & wêy & wêz))

Fra utvalgsaksiomet følger:

(5) (Ax)(Ey)(Func(y) & Dom(y)=x & (Az)(zêx & z≠ø –> y(z)êz).

Vi har derfor at det finnes ¥ slik at:

(6) Func(¥) & Dom(¥)=x & (Az)((zêx & z≠ø) –> ¥(z)êz)

Vi definerer nå en mengde q;0 ved : q;0=Mg(¥(z): zêx). Arbeidet består nå i å vise at q;0 har de egenskapene som kreves av den z som påstås å eksistere i konsekventen til (1). Dette innebærer at vi først må vise (8) q;0ê(K+ – Q+).

(A) Anta for reduktio ad absurdum at (9) q;0êQ+. Nå har man
(10) q;0 Inkl K+. For anta for vilkårlig u at uêq;0. Per definisjon er da u=¥(z) for noe zêx. Men fra (6) følger da at u= ¥(z)êzêx. Nå er ê(K+ – Q+) ifølge (2). I lys av Teorem 10 følger da x Inkl K+. Men da følger zêK+. Men fra det at zêx og (3) følger zê(K+ – Q+) og siden uêz har vi da ved hjelp av Teorem 10 uêK+. Det følger at (10) holder.

Fra (9) og definisjonen av Q+ har man (11) q;0êQ(d,0) for noe d<æ. Da har vi (12) q;0=<x,æ> for noe xêd<æ. Fra (12) og (10) følger da (13) {x,æ}êK+. Nå kan imidlertid ikke {x,æ} være med i Q+. For anta det motsatte. Da ville vi ha {x,æ}=<y,æ> for noey,d;2 der y<d;2<æ. Men da {y,æ}ê{x,æ} og i så fall må man ha enten {y,æ}=x som innebærer at æêx<æ eller at {y,æ}=æ som innebærer æêæ. Begge dele er absurd og vi har derfor ¬({x,æ}êQ+). Dette og (13) gir en

{x,æ}ê(K+ – Q+). Men fra dette og Teorem 7 utleder vi æêQ(d',b') for noen ordinaltall d',b'<æ. Men dette strider mot Teorem 6. (9) leder derfor til en motsigelse og vi har følgelig (14) ¬(q,0êQ+).

(B) Vi må også vise at q;0êK+. Fra (2) følger (15) xêQ(d,a) for noen d,a<æ. Videre følger ¬(xêQ(d,a)) (Siden Q+= UN/d<æ/(Q(d,0)) & ¬(xêQ+)). I lys av Teorem 9 følger da: (16) x Inkl Q(d,c) & c<a<æ for noe ordinaltall c. Fra (3) følger (17) (Ay)(yêx –> yê(K+ – Q+)). Definerer vi g(y) ved:

g(y) = μb(b<æ & yêQ(d,b))

og er y et vilkårlig element i x har vi derfor at yêQ(d,c) og derfor g(y)≤c. Det følger at (18) (Ay)(yêx –> g(y) ≤c). Fra (17) har vi (Ay)(yêx –> ¬(yêQ+)). Herav (Ay)(yêx –> ¬(yêQ(d,0))). Det følger at man har:

(19) (Ay)(yêx –> yê(Q(d,g(y)) – Q(d,0)). Ved hjelp av Teorem 9 og det faktum at Q(d,c;1) Inkl Q(d,c;2) om c;1<c;2 følger fra (19) at:

(20) (Ay)(yêx –> y Inkl Q(d,g(y))). Fra dette og (18) følger :

(21) (Ay)(yêx –> y Inkl Q(d,c)).

Anta nå for vilkårlig u at uêq;0. Da har man i lys av (6) og (7) at u=¥(z)êzêx. Fra dette og (21) følger uêQ(d,c). Vi må altså ha at q;0 Inkl Q(d,c). Men da

q;0êPt(Q(d,c)) Inkl Q(d,c+1) Inkl K+. Dette avslutter beviset for (8).

(C) Det er nødvendig å vise at q;0 har de egenskaper som kreves i det andre kravet i konsekventen i (1). Anta (23) yêx. Fra (3) følger at zêy for noe z og dessuten at (24) yê(K+ – Q+). Vi har ¥(y)êq;0 & ¥(y)êy og siden ¥(y)êy har vi i lys av (24) og tidligere teoremer at ¥(y)êK+. Summa summarum:

(25) ¥(y)êK+ & ¥(y)êy & ¥(y)êq;0.

Anta nå for vilkårlig t at (26) têK+ & têy & têq;0. Da har vi tê¥(z) for noe zêx. Nå er yêx. Har vi da y=z følger t=¥(z)=¥(y). Er y≠z så har man (+) yΩz=ø. Men t=¥(z)^z og têy. Dette strider mot (+). Vi har derfor om t er som ved (26) at t=¥(y). Dette avslutter beviset for punkt (b). Det er lett å vise at punkt (a) holder ved å foreta passende forandringer i beviset ovenfor. **QED.**

I §11.1 - §11.12 er det blitt vist at alle intepretasjonene av de diverse ZFC;u(L;e)-aksiomene over ∂;d holder i ZFC+I. Vi har dessuten vist at alle aksiomene i ZFC;u–(L;e) holder dersom man tolker dem inn i L ved hjelp av ∂;æ. Det følger fra dette at vi har bevist Punkt (a) og (b) i Teorem IV. I den neste paragrafen vil vi bevise de punkter i Teorem IV som gjenstår. Dermed vil vi ha fullført vårt bevis for dette teoremet og dermed også beviset for Teorem II.

§12 Intepretasjonen av ur-individaksiomene.

Vi vender oss nå til intepretasjonen av de setningene om urindivider som vi betraktet i §4.

§12.1

Vi studerer først Ur1. Dette er formelen (Ex)(¬M(x)). Vi har:

Teorem 50. (a) ∂;d(Ur1) (1≤d<æ) (b) ∂;æ(Ur1)

Bevis: Man ser lett at ∂;d(Ur1) er ekvivalent med (1) (Ex)(xêQ(d,0)). Er d=0 har vi Q(d,0)=ø slik at man ser att (1) lar seg vise for alle d der 1≤d<æ. man ser også at ∂;æ(Ur1) er

ekvivalent med (2) (Ex)(xêQ+). Siden Q+ = UN/d<æ/{<x,æ>:xêd} er det åpenbart mulig å vise (2) i ZFC+I. QED.

§12.2

La oss dernest ta for oss Ur2(n). Man har at dette er formelen:

(Ex;1)...(Ex;n)(Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r) & Konj/j,1,n/(¬M(x;j)))

Vi har derfor at ∂;d(Ur2(n)) er følgende formel i L:

(Ex;1)...(Ex;n)(Konj/i,1,n/(x;iêQ(d,æ)) &
Konj/1≤j≠r≤n(¬(x;j,x;rêQ(d,æ)& x;j≠x;r)) &
Konj/i,1,n/(¬(x;iê(Q(d,æ) – Q(d,0)))))

Det er lett å se at denne formelen er ekvivalent med:

(Ex;1)...(Ex;n)(Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r) & Konj/i,1,n/(x;iêQ(d,0)))

Mao. er formelen ekvivalent med Cd(Q(d,0))≥n. Dette holder om d≥n. Vi har derfor:

Teorem 51. (a) ∂;d(Ur2(n)) om n≤d<æ (b) ∂;æ(Ur2(n)) om n<æ

§12.3

De neste aksiomene som må undersøkes er de diverse Ur3(n) der n=1,2,3,..... Vi har at Ur3(n) er den følgende formel:

(Ex,1)...(Ex;n)(Konj/1≤j≠r≤n/(x;j≠x;r) &
Konj/j,1,n/(¬M(x;j)) &(Ax)((¬M(x)) –> Disj/i,1,n/(x=x;j)))

Det er i denne forbindelse lett å vise at ∂;d(Ur3(n)) er ekvivalent med:
(1) Q(d,0)≈ n. Siden Q(d,0) = Mg(<x,æ>: xêd) ser man at dette holder hvis og bare hvis d=n. Vi har derfor:

Teorem 52. (a) ∂;d(Ur3(n)) om n=d og bare da.

§12.4

Aksiomet Ur4 er den følgende formel i L;e:

(1) (Ex)(Ey)(Ez)(M(x) & M(y) & M(z) & x: y–(1-1,på)–> z & y=Ur & z=N)

Man har nå at ∂;d(Ur4), i lys av Teorem 20, Teorem 35 og Teorem 36 er ekvivalent med:

(2) (Ex)(Ey)(Ez)(x,y,zê(Q(d,æ) – Q(d,0)) &
x Inkl (Q(d,æ)XQ(d,æ)) & x: y–(1-1,på)–> z & y=Q(d,0) & z=N)

Definer først en avbildning f: N –(1-1,på)–>w ved f(0)=ø & f({x})= f(x)U{f(x)} om x>0 & xêN. Definer så en funksjon g;d ved:

g;d=Mg(<<x,æ>,x>: xêd)

La tilslutt h;0 være definert ved f;-1°g;w (der w er det første uendelige ordinaltall). Vi har tidligere i det vesentlige bevist at N og Q(d,0) er med i mengden Q(d,æ) – Q(d,0). Det er også likefrem å vise at h;0: Q(w,0)–(1-1,på)–>N og at h;0ê(Q(w,æ) – Q(w,0). Det følger at (2) holder om d=w. Mao. har man:

Teorem 53. (a) ∂;w(Ur4)

Bevis: Som beskrevet ovenfor. Man ser også nokså lett at Teorem 53 bare holder for w. **QED.**

§12.5

Ser man nå på Ur5 som er den følgende formel:

(1) (Ex)(Ey)(Ez)(M(x) & M(y) & M(z) & x: y–(1-1,på)–> z & y=Ur & N inkl z)

finner man ved hjelp av Teorem 20, Teorem 21, Teorem 35 og Teorem 36 at ∂;d(Ur5) er ekvivalent med:

(2) (Ex)(Ey)(Ez)(x,y,zê(Q(d,æ) – Q(d,0) & x: y–(1-1,på)–> z & y=Q(d,0) & N inkl z)

Defineres h;0 på samme måte som i §12.4 ser man lett at denne avbildningen har de egenskapene man ønsker. Imidlertid kan man også finne en annen funksjon som har de ønskede egenskaper. Definer først q ved transfinit induksjon på den følgende måte:

(i) q(0) =ø
(ii) q(a+1)={q(a)}
(iii) q(a) = {q(b): b<a} om aêK;II

Man ser lett at hvis aêOn så er Res(q,a) en en-entydig funksjon med a som domene. Er a≥w ser man også at N Inkl Rgn(Res(q,a)). Definerer vi derfor h1;d ved: h1;d = Res(q,d)°g;d er det ikke så vanskelig å finne ut at:

h1;d : Q(d,0) –(1-1,på)–> Rgn(h1;d) og at N Inkl Rgn(h1;d) om d≥w.

Man kan også lett vise at Rgn(h1;d)ê(Q(d,æ) – Q(d,0)) om d<æ. Vi har altså at det følgende holder:

Teorem 54. (a) Er d ≥w så er ∂;d(Ur5) bevisbar i ZFC + I
(b) ∂;æ(Ur5) er bevisbar i ZFC + I

Beviset er som antydet ovenfor. I forbindelse med (b) er det best å benytte avbildningen h;0 som ble introdusert i §12.4.

§12.6

Det gjenstår å undersøke Ur6, som er den følgende formel i L;e:

(1) (Ax)(M(x) –> (Ey)(M(y) & (Ez)(z: y–(1-1,på)–>x & (Az)(zêy –> ¬M(z))))

Ved hjelp av Teorem 20, Teorem 35 og Teorem 36 ser man lett at ∂;d(Ur6) er ekvivalent med:

(2) (Ax)(xê(K+ – Q+) –> (Ey)(Ez)(y,zê(K+ – Q+)&
z: y–(1-1,på)–>x & (Az)(zêy –> zêQ+)))

Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise (2).

Anta nå at xê(K+ – Q+). Da vet vi at xêQ(d,a) for noe d,a<æ, og dessuten at ¬(xêUN/d<æ/(Q(d,0))). Vi har følgelig at x Inkl Q(d,c) for noe c<a<æ. Siden Cd(Q(d,c)) <æ følger derfor at Cd(x)<æ. Det følger da, siden Cd(x)≈ q for noe qêOn, at Cd(x) ≈ Mg(<y,æ> : yêq) Inkl Q+. Mao. finnes en f der:

f: x –(1-1,på)–> Mg(<y,æ>: yêq) inkl Q+

(q må være mindre enn æ siden x≈q og Cd(x)<æ). Det eneste vi derfor behøver å vise er at fê(K+ – Q+). Det er lett å vise at (1) ¬(fêQ+). Nå har vi at alle elementene i f er ordnete par <a,b> der aêx og bêQ+ og derfor bêQ(d,0) for noe d<æ. Siden x Inkl Q(d,c) følger det at {a} og {a,b} Inkl Q(d,c) og vi må derfor ha at de er elementer i Q(d,c+1). Det følger da at <a,b>={{a},{a,b}}êQ(d,c+2) og at fêQ(d,c+3) siden alle elementene i f er med på det foregående nivå. Vi har jo at
f Inkl Q(d,c+2) og følgelig at fêPt(Q(d,c+2)). Fra dette følger at fêK+. Sammen med (1) gir dette: fê(k+ -Q+). Vi har dermed bevist det følgende teorem:

Teorem 55. (a) ∂;æ(Ur6)

Med dette teoremet og Teorem 50 – 54 har vi fullført beviset for de resterende punkter (c), (d) og (e) i Teorem IV. Punktene (a) og (b) i dette teorem ble bevist i §11. Vi har dermed levert et fullstendig bevis for Teorem IV. Men dette innebærer at vi også har gitt bevis for våre hovedpåstander, nemlig Teorem I og Teorem II.

Dermed har vi avsluttet den oppgaven som vi ønsket å løse i dette arbeidet.

*****

Referanser

Referanser

Rognes [1], Rognes, Morten, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Takeuti [1], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Introduction to Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1971.
Takeuti [2], G. Takeuti and W.M. Zaring, "Axiomatic Set Theory", Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.